Chapitre 7

Développements limités et asymptotiques

Nous allons voir dans ce chapitre comment obtenir des développements limités, asymptotiques ou généralisés à l'aide de la TI-Nspire CAS, ainsi que la détermination d'équivalent. La première partie concerne l'utilisation directe de la fonction **taylor**, puis nous verrons comment suivre les étapes du calcul d'un développement limité, ou encore obtenir un développement asymptotique ou généralisé. Vous trouverez également un exemple de recherche de développement limité d'une fonction définie par une fonction implicite dans le **chapitre 12** sur les fonctions de plusieurs variables.

1. Calcul direct

Dans la majorité des cas, il est possible d'obtenir directement les développements limités en utilisant la fonction **taylor**.

On doit utiliser la syntaxe

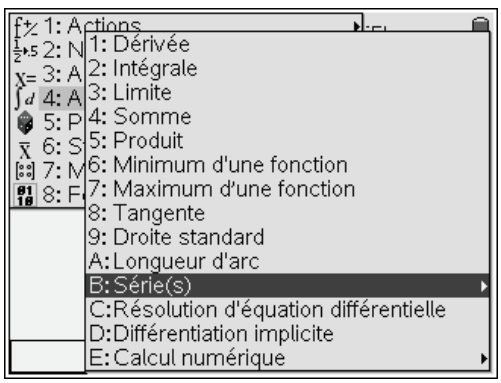
taylor(*expression*, *variable*, *ordre*)

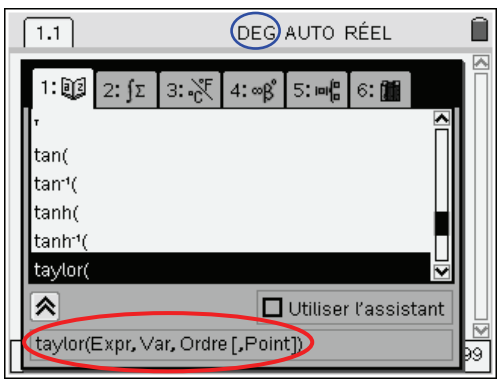
ou, pour un développement en un point autre que $x_0 = 0$

taylor(*expression*, *variable*, *ordre*, *point*).

Cette fonction est accessible à partir du menu **Analyse\Séries** (menu 4 B), mais si vous avez un doute sur l'ordre des arguments, le plus simple est d'utiliser le catalogue des fonctions.

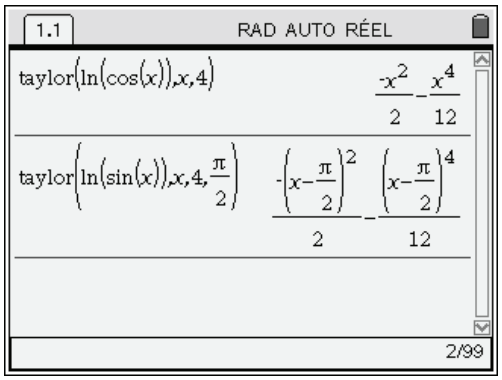
Vous obtiendrez en bas de l'écran une aide sur la syntaxe de la fonction :





☞ *Remarque. Bien vérifier lorsque l'on travaille avec les fonctions trigonométriques, comme nous allons le faire, d'être en mode Radian, voir réglage du classeur* (home 8 1).

Voici par exemple deux développements à l'ordre 4, au voisinage de 0, puis au voisinage de $\pi/2$:

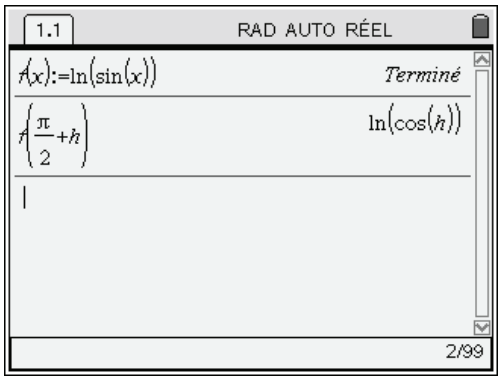


☞ *Lorsque l'on fait un développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre 1 en un point x_0, on obtient l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point $M(x_0, f(x_0))$.*

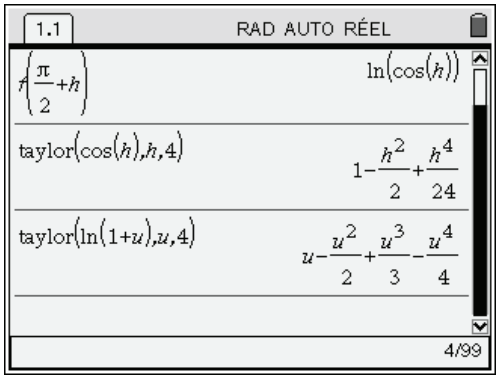
2. Développements limités par étapes

2.1 *Résolution pas à pas*

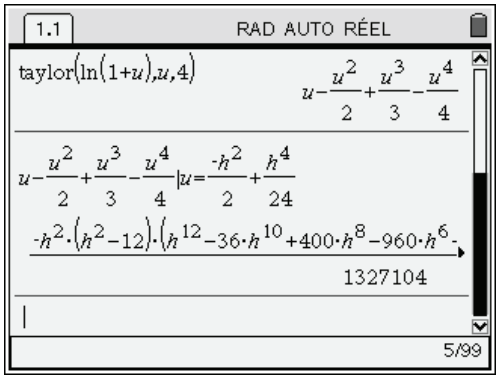
On peut parfois souhaiter suivre les différentes étapes du calcul. Reprenons par exemple le développement à l'ordre 4, dans la suite nous écrirons DL4, de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $x = \frac{\pi}{2}$. On commence par poser $x = \frac{\pi}{2} + h$ pour se ramener en 0 :

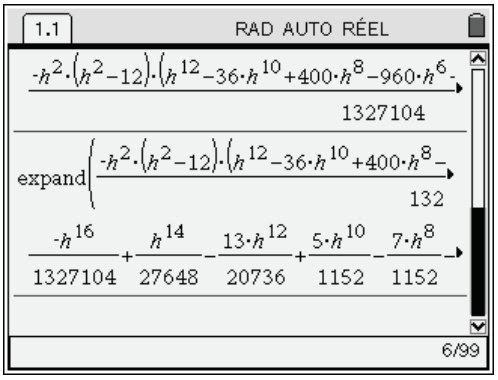


On va ensuite utiliser les DL4 de $\cos(h)$ et de $\ln(1+u)$. En principe ce sont des résultats de cours, mais nous pouvons les retrouver si nécessaire :

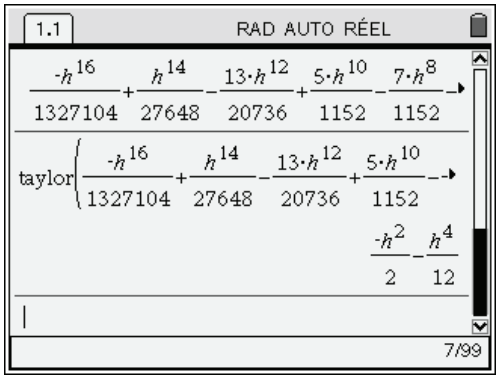


Il reste à présent à remplacer u par $\frac{h^4}{24}-\frac{h^2}{2}$ dans le DL4 de $\ln(1+u)$, puis à développer le résultat obtenu :





Contrairement à ce que l'on aurait fait lors d'un calcul à la main, l'unité nomade TI-Nspire CAS a conservé tous les termes, y compris ceux dont le degré dépasse 4. On peut visualiser les termes "utiles" en faisant défiler le résultat affiché à l'écran. Il est également possible d'éliminer tous les termes de degré supérieur à 4 en appliquant la fonction **taylor** à notre résultat.

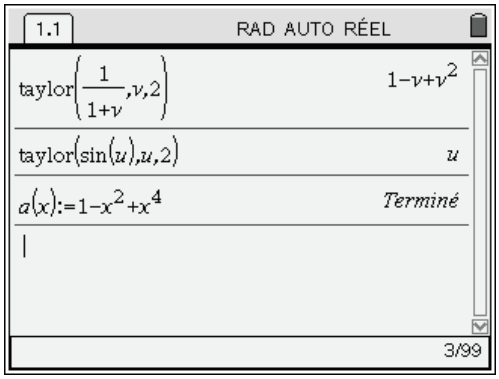


Il ne reste plus qu'à remplacer h par $x-\frac{\pi}{2}$ pour obtenir le résultat demandé.

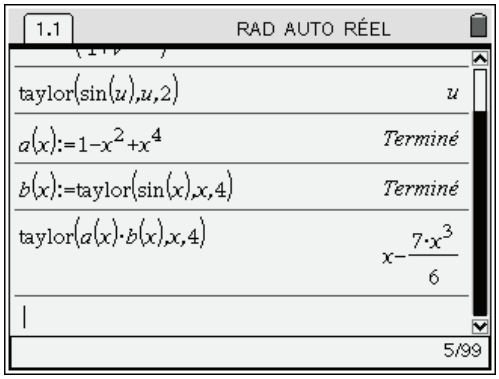
Dans ce qui précède, nous avons tronqué le résultat obtenu en composant deux développements. Il est naturellement possible de procéder ainsi dans tous les calculs qui peuvent se présenter.

Voici par exemple le développement à l'ordre 4 de $\frac{\sin(x)}{1+\sin\left(x^2\right)}$:

On recherche un DL2 de $f(u)=\frac{1}{1+\sin(u)}$, puis on remplace u par x^2 :



Il reste à multiplier ce DL4 par le DL4 de $\sin(x)$, puis à tronquer à l'ordre 4 le résultat obtenu :



Il n'y a pas de terme en x^4, ce qui était prévisible : la fonction est impaire.

Toutes ces étapes se font relativement simplement. Il est évidemment possible d'utiliser directement la fonction **taylor**. L'unité nomade TI-Nspire CAS peut calculer des développements limités de fonctions plus complexes et à des ordres supérieurs, comme on pourra le voir dans le paragraphe suivant.

2.2 *Développements limités des fonctions définies par un prolongement par continuité*

La fonction **taylor** permet également de déterminer des développements limités de fonctions obtenues en prolongeant par continuité une fonction qui n'était pas définie en x_0.

C'est le cas avec $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$, prolongée par $f(0)=1$.

Pour obtenir le développement limité d'une fonction de ce type, il est possible de procéder par étapes, comme si l'on effectuait le calcul "à la main", mais aussi directement avec **taylor**.

Nous allons rechercher ici un développement à l'ordre 3.

Si vous êtes familiarisé avec les développements limités, vous savez déjà qu'un développement à l'ordre 3 du numérateur et du dénominateur n'est pas suffisant. Cela provient du fait que $\sin(x)$ est nul pour $x=0$.

En effet, si l'on calcule un développement à l'ordre k pour le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\ln(1+x)=a_1x+\cdots+a_kx^k+o\left(x^k\right), \text{ avec } a_1\neq 0$$

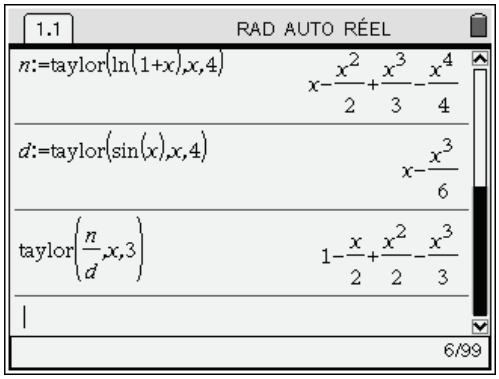
$$\sin(x)=b_1x+\cdots+b_kx^k+o\left(x_k\right), \text{ avec } b_1\neq 0.$$

On a alors

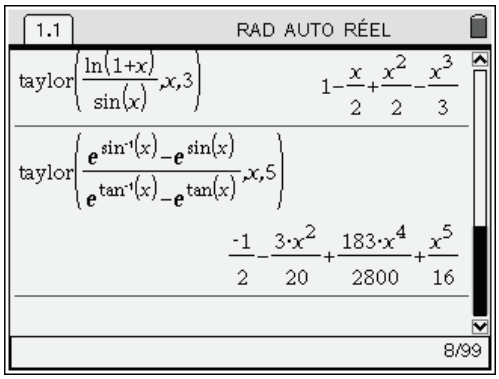
$$f(x)=\frac{a_1x+\cdots+a_kx^k+o\left(x^k\right)}{b_1x+\cdots+b_kx^k+o\left(x^k\right)}=\frac{a_1+\cdots+a_kx^{k-1}+o\left(x^{k-1}\right)}{b_1+\cdots+b_kx^{k-1}+o\left(x^{k-1}\right)}$$

ce qui permet d'obtenir un développement limité à l'ordre $k-1$.

On demande donc un développement à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ et de $\sin(x)$. On demande ensuite un développement à l'ordre 3 du quotient de ces deux développements limités :



Il est possible d'obtenir le développement directement, même pour des fonctions plus complexes et à des ordres plus important comme le montre le second exemple ci-dessous.



3. Développements asymptotiques et développements généralisés

Nous allons à présent voir sur deux exemples comment obtenir le développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini.

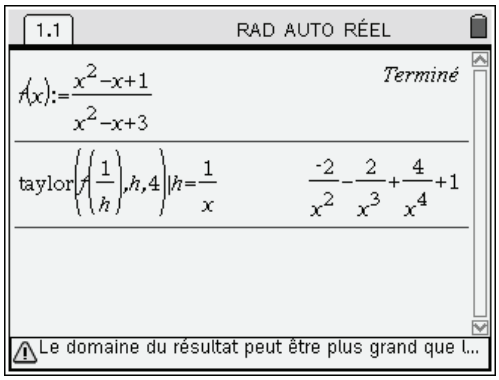
3.1 *Développements asymptotiques*

Un premier exemple

On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x+3}$.

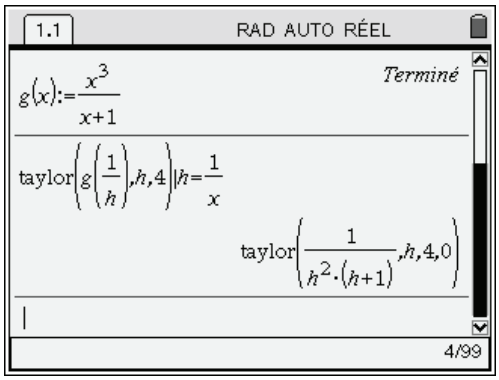
On demande de déterminer un développement asymptotique du type $f(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de l'infini.

Pour cela, on peut faire comme "à la main" : se ramener au voisinage de 0. On calcule un développement de Taylor de la fonction $f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0, et l'on obtient le développement asymptotique en remplaçant *h* par $\dfrac{1}{x}$.

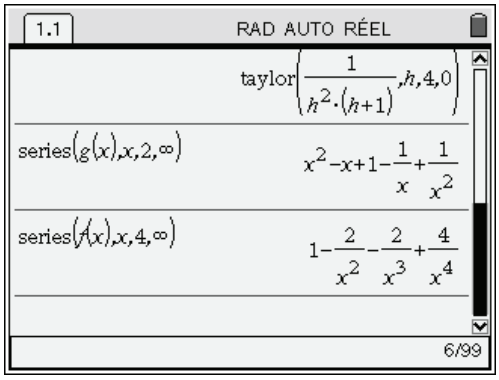


Ce calcul a été possible car la fonction $F(h)=f\left(\frac{1}{h}\right)$ est bien définie au voisinage de 0, et admet un DL4 en ce point. Cela ne sera pas toujours possible.

Par exemple pour $g(x)=\frac{x^3}{x+1}$, on a $G(h)=g\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h^2(h+1)}$ et cette fonction n'est pas définie en 0. Nous reviendrons sur cet exemple dans le paragraphe suivant.



Il est possible d'obtenir le résultat directement en utilisant la fonction **series** (menu 4 B 2).



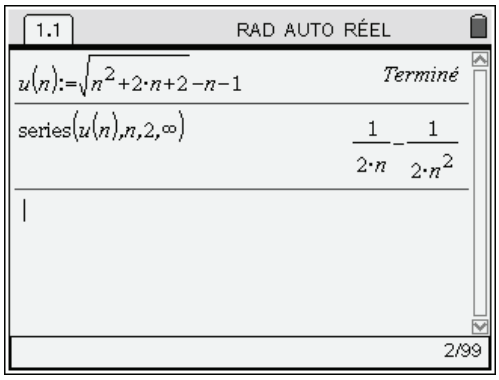
☞ *∞ s'obtient à l'aide des touches* ctrl i *ou dans la table de caractères* ctrl.

Deuxième exemple

On considère $u_n=\sqrt{n^2+2n+2}-n-1$.

On demande de déterminer un développement asymptotique du type $u_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de l'infini.

La fonction **series** donne directement le résultat :

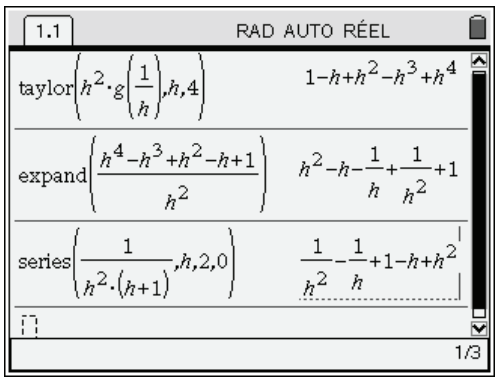


3.2 *Développements généralisés*

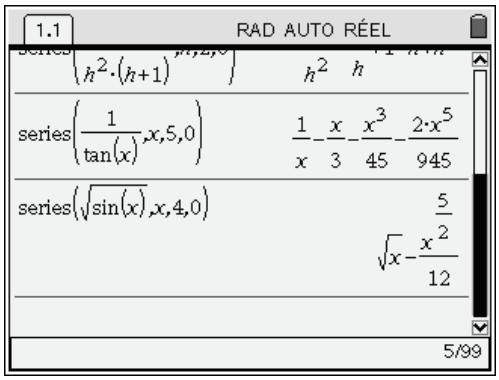
Pour la fonction $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x}$ citée à la fin de l'étude de l'exemple 1 du paragraphe précédent, nous avons vu que l'on ne peut pas obtenir un développement limité de $G(h)=g\left(\dfrac{1}{h}\right)=\dfrac{1}{h^2(1+h)}$ en 0, la fonction n'étant pas définie en ce point et n'admettant pas de prolongement par continuité.

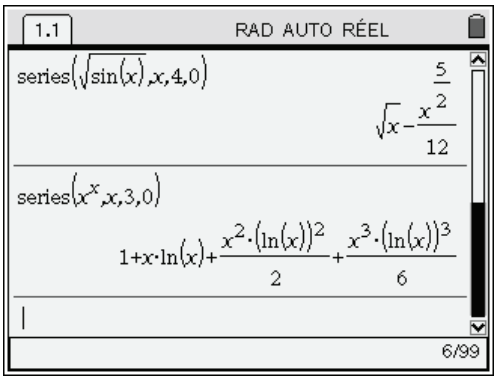
Pour obtenir un développement généralisé à l'ordre *k*, il faudrait donc faire un développement à l'ordre $k+2$ de $h^2 f\left(\dfrac{1}{h}\right)=\dfrac{1}{1+h}$, puis diviser par h^2. Résultat que l'on obtient directement à l'aide de la fonction **series** (menu 4 B 2).

Voici ce que l'on obtient pour $k=2$:



Voici ci-dessous d'autres développements généralisés obtenus à l'aide de la fonction **series** :





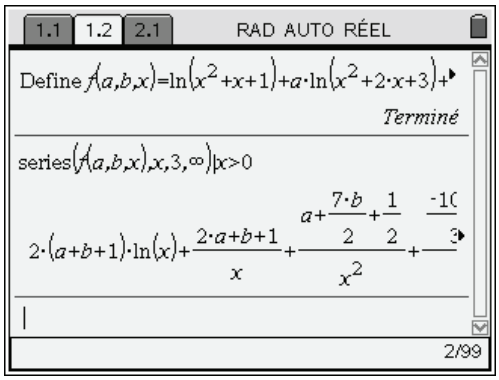
Application : exercice posé à l'oral de l'Ensam

Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right) + a\ln\left(x^2 + 2x + 3\right) + b\ln\left(x^2 + x + 4\right)$$

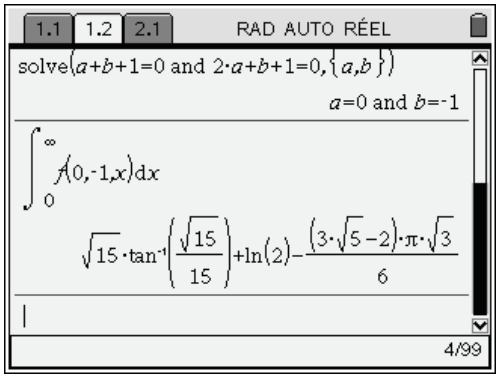
1. On demande de déterminer les valeurs de *a* et *b* pour lesquelles la fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On demande ensuite de calculer la valeur de l'intégrale.

On définit la fonction et on calcule son développement asymptotique au voisinage de $+\infty$.



On obtient un terme en $\ln(x)$, un terme en $\frac{1}{x}$, ainsi qu'un en $\frac{1}{x^2}$ et un en $\frac{1}{x^3}$.

Pour que la fonction soit intégrable sur $[1, +\infty[$, il faut et il suffit que les coefficients des deux premiers termes soient nuls. La fonction étant définie et continue sur $[0, +\infty[$, elle sera intégrable sur cet intervalle.



4. Équivalent d'une fonction en un point

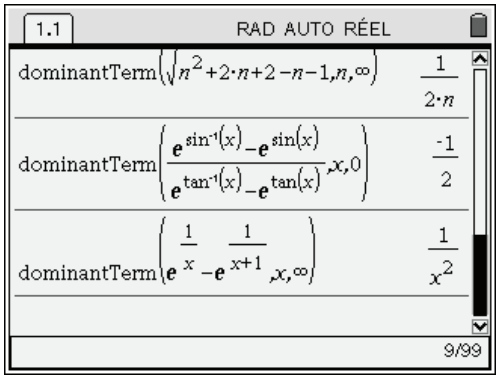
La troisième fonction du menu **Série(s)** : **dominantTerm** (menu 4 B 3) permet d'obtenir l'équivalent d'une fonction en un point.

On peut reprendre l'exemple de la suite (u_n) étudiée dans le paragraphe précédent ($u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - n - 1$), pour trouver un équivalent de u_n au voisinage de l'infini, il suffit de taper **dominantTerm(u(n),n,∞)**.

On peut de la même façon trouver la limite en 0 de la fonction *f* définie pour $x \neq 0$ par :

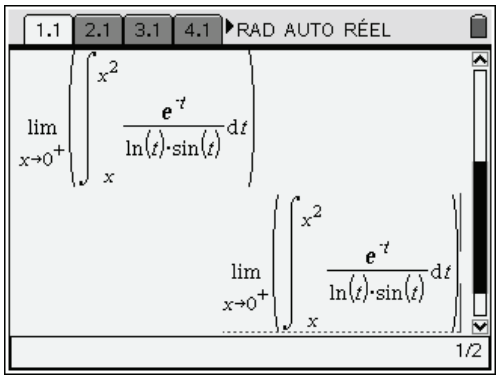
$$f(x) = \frac{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}}{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}$$

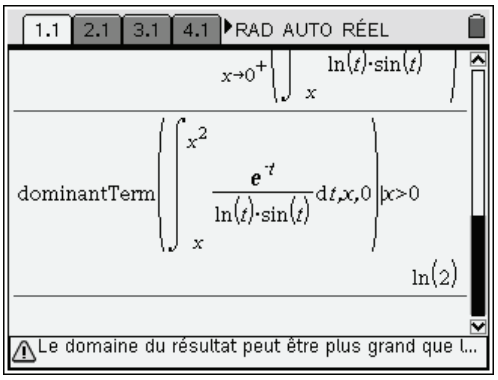
ou calculer un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$.



Dans certains cas la fonction **dominantTerm** permet d'obtenir des limites que la fonction **limit** ne peut déterminer. Un exemple, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0_+} \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sin t \ln t}\,\mathrm{d}t$$





Sur l'écran de gauche, on voit que la fonction **limit** échoue, alors que sur l'écran de droite la fonction **dominantTerm** nous donne le résultat.

Exercices

1 Fonction définie par une intégrale

Déterminer un développement limité en 0 de $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t+t^2}$.

2 DL par étapes

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ de $f(x)=(\tan x)^{\tan 2x}$.

3 Constante d'Euler

Démontrer que la suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ converge.

On pourra étudier la nature de la série de terme général $v_n=u_{n+1}-u_n$.

4 Courbe asymptote

Déterminer une courbe asymptote à la courbe d'équation $y=\frac{x^3}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}$ au voisinage de l'infini.

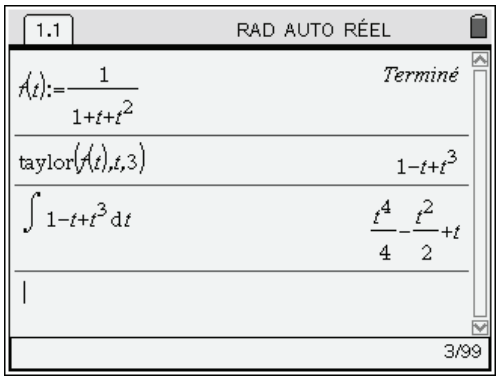
5 Points de rebroussement

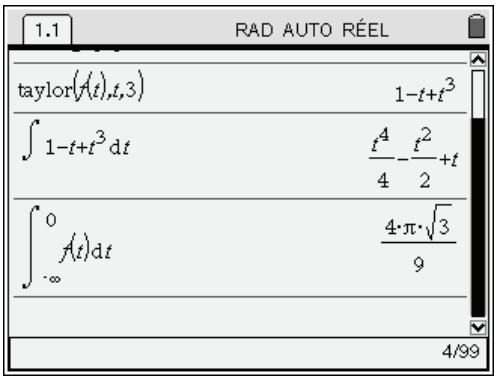
On considère l'arc paramétré défini par $x(t)=t^2e^{-t}$, $y(t)=t^4e^{-t}$. Étudier la nature de la courbe au voisinage du point de paramètre $t=0$.

Solutions des exercices

1 Fonction définie par une intégrale

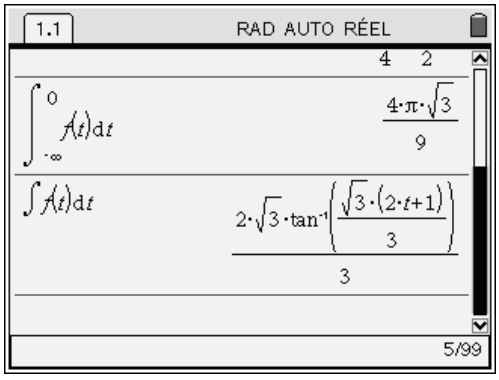
Il suffit d'intégrer le DL3 de $\frac{1}{1+t+t^2}$, et d'utiliser le fait que le terme constant est égal à $F(0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+t+t^2}$.

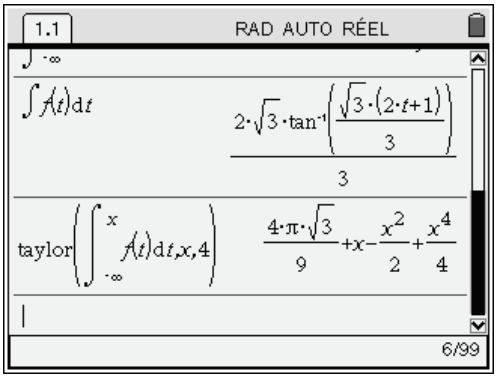




Pour avoir quelques détails sur ce dernier calcul, on peut demander l'expression d'une primitive de la fonction, que l'on obtient facilement en écrivant $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

On peut enfin vérifier sur le dernier écran que la TI-Nspire CAS était capable de résoudre directement l'exercice proposé :

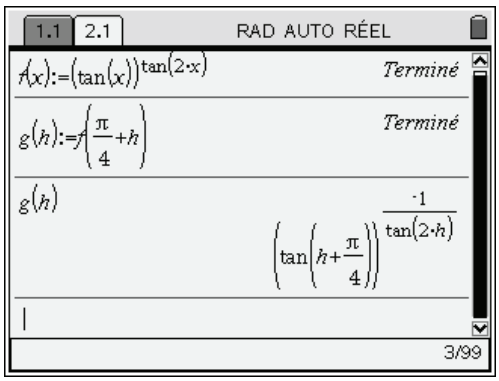


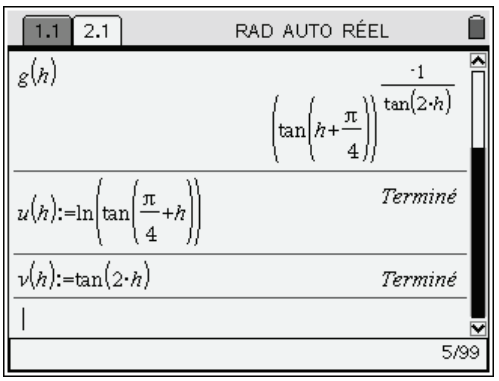


2 DL par étapes

Il est évidemment possible d'utiliser directement la fonction **taylor** pour rechercher ce DL, comme nous allons le faire à la fin pour vérifier le résultat. Mais il est clair que c'est la méthode à utiliser, et non le simple résultat final, qui est évaluée dans un exercice de ce type. Nous allons procéder par étapes.

On commence en posant $x=\frac{\pi}{4}+h$ pour se ramener au voisinage de 0.





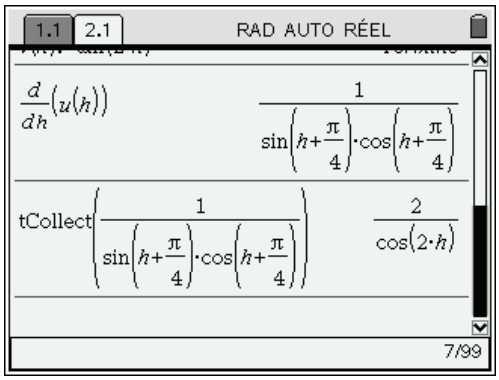
On a donc

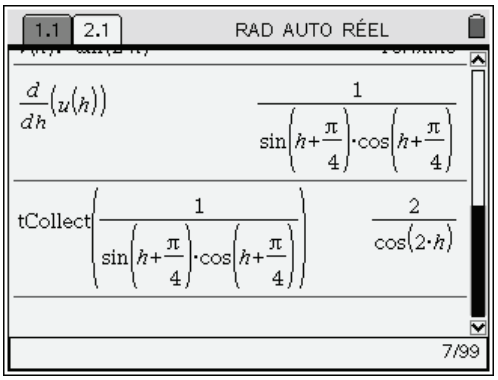
$$g(h) = e^{\frac{-1}{\tan(2h)}\ln\left(\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{-\frac{u(h)}{v(h)}}$$

avec $u(h) = \ln\left(\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $v(h) = \tan(2h)$.

Pour obtenir un DL4 de $g(h)$, on doit déterminer un DL5 de $u(h)$ et de $v(h)$, ce qui après simplification par h permettra d'obtenir un DL4 du quotient $w(h) = \frac{u(h)}{v(h)}$.

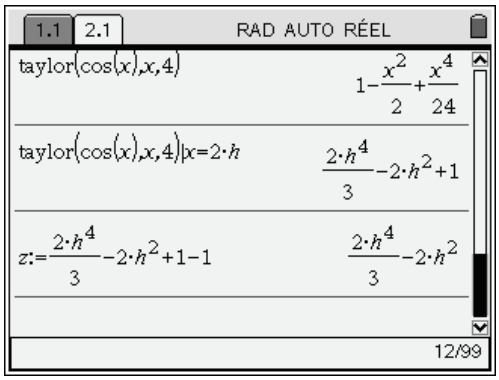
Pour obtenir un DL5 de $u(h)$, on va passer par un DL4 de la dérivée de cette fonction, puis l'intégrer. Il n'y a pas de terme constant puisque $u(0) = 0$.

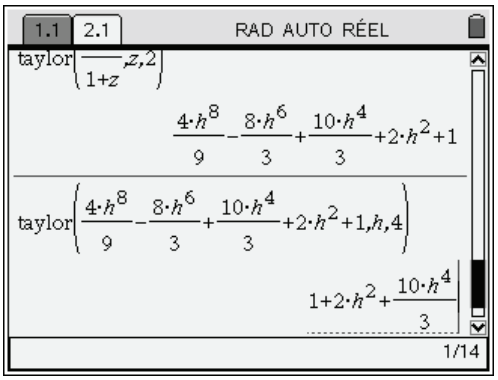




Pour détailler le calcul du DL de $\frac{1}{\cos(2h)}$, on utilise le DL de $\cos(x)$, et on remplace x par $2h$. On obtient ainsi un résultat du type $1+z$, avec $z = -2h^2 + \frac{2h^4}{3}$.

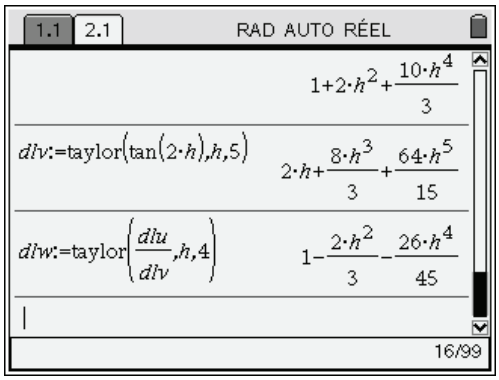
On peut ensuite remplacer z par cette valeur dans le DL2 de $\frac{1}{1+z}$, en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4.





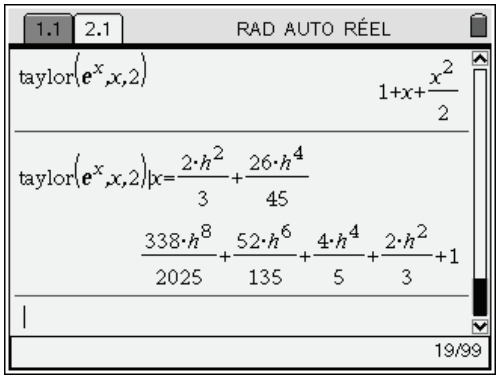
Dans la pratique, la calculatrice fait le calcul avec tous les termes (c'est elle qui travaille, donc ce n'est pas trop grave...). Pour éliminer les termes superflus, on termine en prenant un DL4 du résultat obtenu.

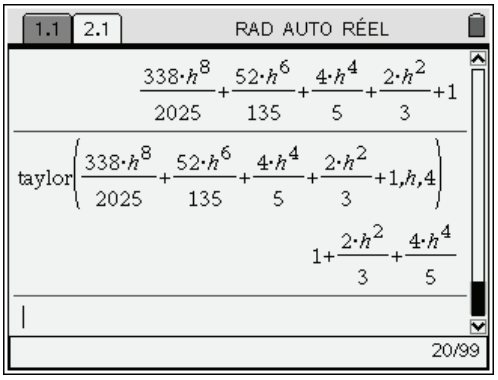
Reprenons… il nous reste à calculer le DL5 de $v(h) = \tan 2h$. Ce qui n'est pas trop difficile. On en déduit le DL4 de $w(h)$.



On a donc obtenu $g(h)=e^{-w(h)}=e^{-1+\frac{2h^2}{3}+\frac{26h^4}{45}+o\left(h^4\right)}=\frac{1}{e}e^{\frac{2h^2}{3}+\frac{26h^4}{45}+o\left(h^4\right)}$.

Il reste à utiliser le DL2 de e^x en 0, et à remplacer x par $\frac{2h^2}{3}+\frac{26h^4}{45}$.

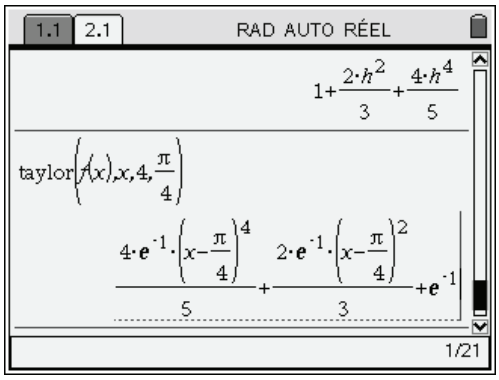




En conclusion, $g(h)=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2h^2}{3}+\frac{4h^4}{5}+o\left(h^4\right)\right)$ et donc :

$$f(x)=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2\left(x-\pi/4\right)^2}{3}+\frac{4\left(x-\pi/4\right)^4}{5}+o\left(\left(x-\pi/4\right)^4\right)\right).$$

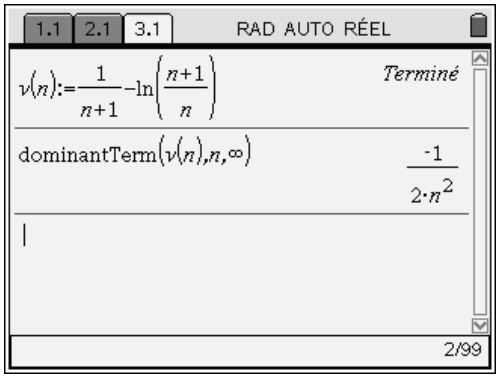
Ce que l'on peut vérifier directement :

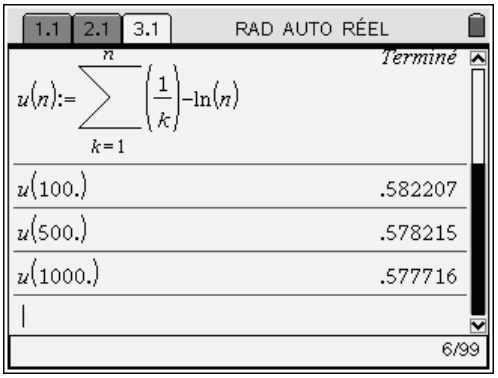


3 Constante d'Euler

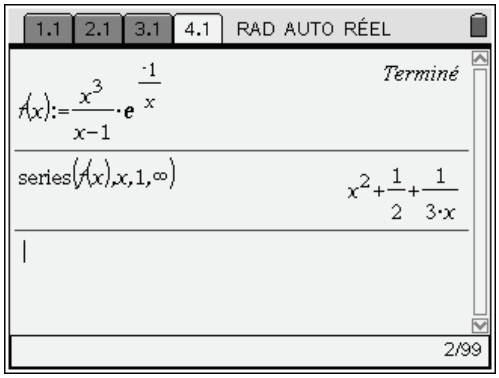
$v_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. Pour montrer que la suite (u_n) converge, il suffit de montrer que la série (Σv_n) converge. En effet, $\sum_{i=1}^{n-1} v_i = \sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1} - u_i) = u_n - u_1$, ce qui montre que si $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_n$ converge vers S, alors (u_n) converge, et $\lim_{n\to\infty} u_n = S + u_1$.

L'écran de gauche ci-dessous, permet de montrer que $v_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$, ce qui prouve la convergence de la série (Σv_n). L'écran de droite montre quelques calculs de valeurs approchées de u_n.





4 Courbe asymptote

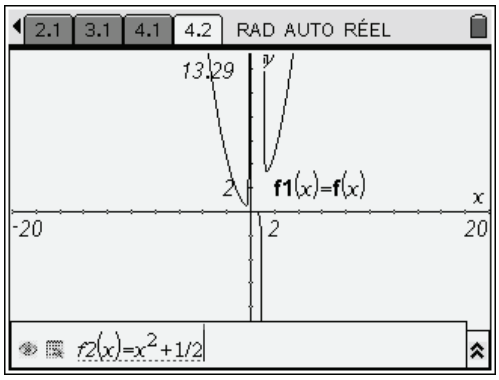


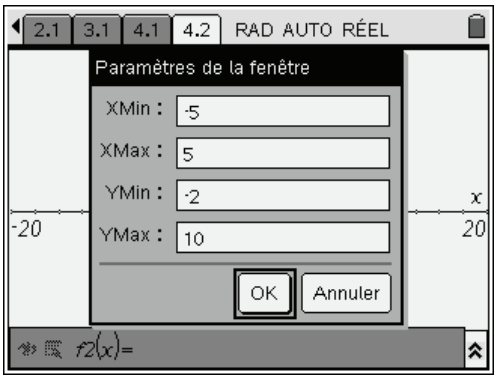
On peut en déduire que $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui montre que la parabole d'équation $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de l'infini.

On peut le vérifier graphiquement, on insère une nouvelle page ctrl I, on choisit l'application Graphiques & géométrie.

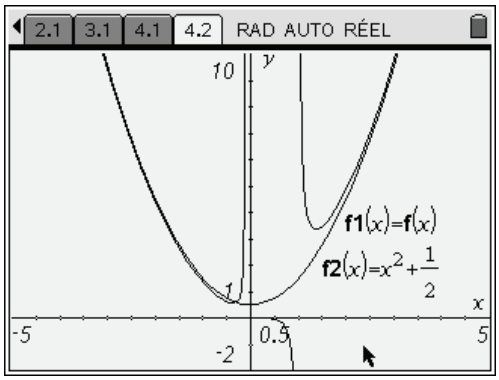
Dans la ligne d'édition pour **f1** on entre $f(x)$, pour **f2** $x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Il suffit ensuite de régler les paramètres de la fenêtre.

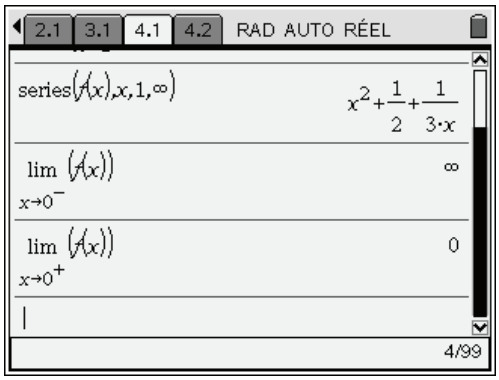


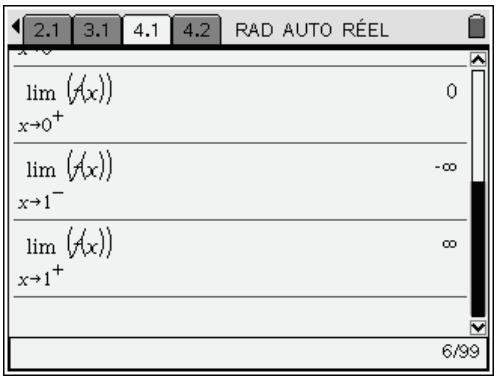


☞ *On peut cacher la ligne d'édition à l'aide de la combinaison de touches* ctrl G.



N.B. L'unité nomade TI-Nspire CAS permet également de vérifier directement les valeurs des limites à gauche et à droite de la fonction en 0 et 1 (il vous reste à justifier le résultat obtenu !).

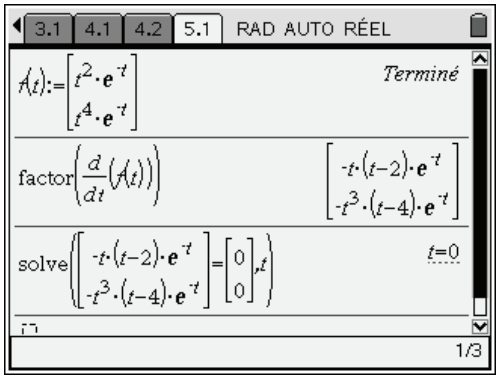


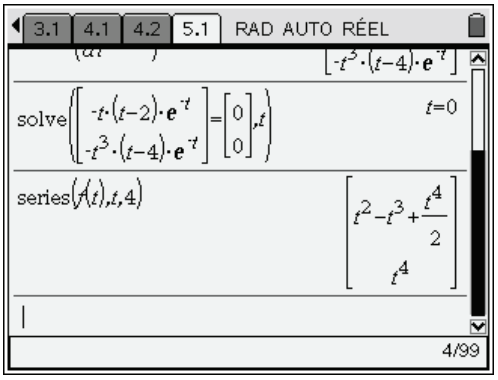


Si on utilise le modèle $\lim_{\square\to\square}$ destiné à la saisie des limites, et accessible par ctrl ÷, la direction est donnée par **–** ou par **+**, comme dans la notation mathématique usuelle (écrans ci-dessus).

Il est aussi possible d'utiliser la syntaxe **lim(f(x),x,a,-1)** pour la limite à gauche, et **lim(f(x),x,a,1)** pour la limite à droite.

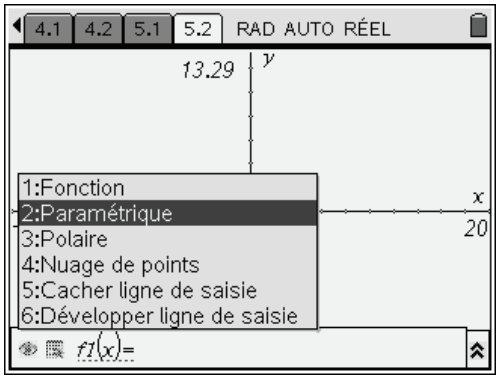
5 Points de rebroussement

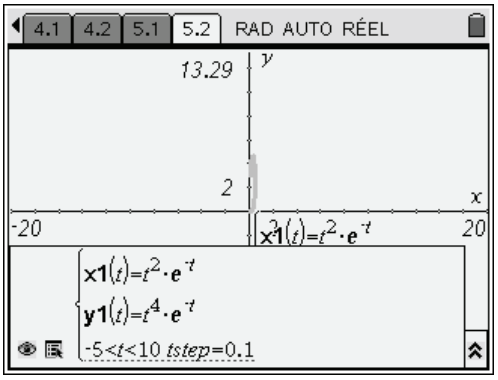




Le calcul fait dans l'écran de gauche permet de montrer que le point correspondant à $t = 0$ est l'unique point singulier de la courbe. Il suffit de faire un développement limité en ce point pour étudier la nature de ce point. Comme on peut le voir, il est possible d'utiliser la fonction **series** avec une fonction vectorielle (ce qui n'est pas le cas de la fonction **taylor**).

$M(t) = M(0) + t^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t^4\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix} + o\left(t^4\right)$. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ sont colinéaires, $\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$ est, en revanche, non colinéaire aux vecteurs précédents. On a donc un point de rebroussement de seconde espèce, avec une tangente confondue avec l'axe des abscisses. Il est facile de le vérifier graphiquement.





Attention, un zoom standard ne permet pas de bien visualiser la courbe (la construction ne se fait que pour $0 \le t \le 2\pi$). On modifie l'étendue et le pas pour la variable *t*.

Il est ensuite préférable de recourir à un cadrage personnalisé :