

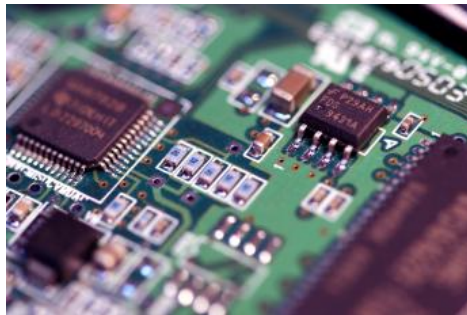
---

## *Systemes électroniques*

---

### **Chapitre 9**    ***CIRCUITS A CAPACITÉS COMMUTÉES***

---





# T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

<b>8.</b>	<b>CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES.....</b>	<b>1</b>
8.1	INTRODUCTION.....	1
8.1.1	Remarques pour les puristes .....	2
8.2	FILTRE ANTIREPLIEMENT ET ECHANTILLONNEUR.....	3
8.2.1	Généralités .....	3
8.2.2	Caractéristique classique de l'échantillonneur bloqueur.....	3
8.2.3	Caractéristique modifiée de l'échantillonneur bloqueur.....	4
8.3	CONSIDÉRATION DE BASE SUR LES CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES.....	7
8.3.1	Emulation d'une résistance.....	7
8.3.2	Précision des circuits à capacités commutées .....	11
8.3.3	Analyse du contrôle de circuits à capacités commutées à l'aide de deux horloges .....	12
8.3.4	Exemple : Filtre passe-bas du 1 <sup>er</sup> ordre à capacité commutée.....	14
8.4	AMPLIFICATEURS À CAPACITÉS COMMUTÉES .....	19
8.4.1	Amplificateur sans commutation .....	19
8.4.2	Amplificateur à capacités commutées. ....	22
8.5	INTÉGRATEUR À CAPACITÉS COMMUTÉES.....	37
8.5.1	Intégrateur sans commutation.....	37
8.5.2	Intégrateur à capacités commutées .....	39
8.6	MODÈLE DES CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES À DEUX PHASES D'HORLOGE.....	48
8.6.1	Généralités .....	48
8.6.2	Les sources de tensions indépendantes.....	48
8.6.3	Circuits génériques à capacités commutées.....	49
8.6.4	Modèles équivalents et modèles simplifiés des principales structures de circuits à capacités commutées.....	49
8.6.5	Simulation de circuits à capacités commutées à l'aide SPICE .....	57
8.7	FILTRE À CAPACITÉS COMMUTÉES DU 1 <sup>ER</sup> ORDRE .....	59
8.7.1	Généralités .....	59
8.7.2	Filtre passe-bas du 1 <sup>ère</sup> ordre.....	59
<b>A.</b>	<b>ANNEXES.....</b>	<b>63</b>
A.1.1	Transformée en z de la fonction de transfert de l'amplificateur .....	63

Bibliographie



## 8. CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES

### 8.1 INTRODUCTION

Les précisions absolues des composants passifs (R et C) sont, de manière générale, faibles. Ceci a pour conséquence une faible précision des réponses harmoniques des filtres RC. Lorsque les exigences sur les performances sont élevées, la faisabilité de ces filtres n'est pas plus garantie. L'implantation de filtres performants en terme de précision est possible en utilisant la technique des capacités commutées, ceci depuis le milieu des années 70. Cette technique est facilement réalisable avec la technologie standard CMOS également utilisée pour les circuits digitaux. Les principaux avantages des circuits à capacités commutées (*switched capacitor circuits*) sont les suivants :

1. Impédance d'entrée quasi infinie des amplificateurs opérationnels, commutateur analogique de réalisation simple.
2. Les performances en précision ( $\sim 0.2\%$ ) sont obtenues par appariement des composants et non pas par leur précision absolue. L'ajustement des composants n'est donc pas nécessaire. Grâce à cet appariement, les effets de la température et du vieillissement sont fortement réduits.
3. Il est possible de réaliser des filtres avec de grandes constantes de temps sans utiliser de composants de grande taille. Ceci signifie une diminution de la surface du chip par rapport à une implantation de filtres actifs RC.
4. Les circuits à capacités ont des structures en boucles fermées. Ceci permet des plages d'amplitude maximale et une forte dynamique.

Les inconvénients majeurs sont :

1. Vu le caractère échantillonné des circuits à capacités commutées, il est nécessaire d'ajouter un filtre anti-repliement à l'entrée et un filtre de lissage en sortie, lesquelles augmente la complexité et la taille de l'ensemble.

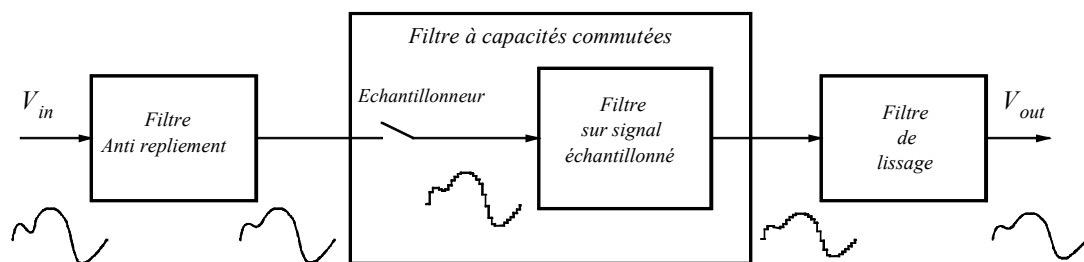


Figure 8-1 : Mise en œuvre d'un systèmes utilisant un circuit à capacités commutées

2. les amplificateurs opérationnels intégrés dans les circuits à capacités commutées doivent avoir un gain DC aussi grand que possible et un produit gain – bande passante (GBW) beaucoup plus grand que la largeur de bande du signal à traiter.
3. Le bruit est repliée dans la bande  $[0 \dots F_S/2]$ , ainsi la densité spectrale de bruit est augmentée par un facteur  $F_S/(2F_B)$  où  $F_S$  est la fréquence d'échantillonnage du signal et  $F_B$  est la largeur de bande de la source de bruit.

La composante la plus importante des circuits à capacités commutées est évidemment les signaux. Ces derniers sont caractérisés par leurs propriétés temporelles et d'amplitudes. Du point de vue temporel, les signaux sont classés en deux catégories, soit continu ou discret. Un signal continu dans le temps est défini à chaque instant alors qu'un signal discret est défini soit sur une plage de temps soit en des instants précis. Les signaux peuvent également être continus ou discrets en amplitude. Un signal analogique est défini comme un signal continu en amplitude (toutes les valeurs d'amplitudes sont possibles dans une plage donnée). Un signal numérique (*digital*) est quant à lui défini que pour un certain nombre de valeurs d'amplitude. Les circuits à capacités commutées fournissent des signaux continu en amplitude et discret en temps. On parle alors de circuits analogiques échantillonnés (*analog sampled data circuits*).

### 8.1.1 Remarques pour les puristes

Formellement il faut dissocier le terme de **condensateur** qui représente le nom du composant du terme **capacité** qui représente la valeur en Farad [F] du condensateur. Pour des raisons de simplification et de lien avec la langue anglaise, nous ne retiendrons ici que le terme de capacité (*capacitor*).

## 8.2 FILTRE ANTIREPLIEMENT ET ECHANTILLONNEUR

### 8.2.1 Généralités

Vu le caractère échantillonné des circuits à capacités commutées, il est de première importance de faire précéder ces circuits par un filtre antirepliement. Ce filtre dont le type dépend des contraintes de l'application est réalisé en analogique à l'aide de composants passifs R, C et d'amplificateurs opérationnels. L'étude de ces filtres fait l'objet d'un autre cours, la synthèse de ces derniers est donc considérée comme connue.

Tout système échantillonné commence par un échantillonneur qui, pour des raisons de simplification est supposé fournir à un instant précis une photographie du signal d'entrée. Dans le cas des circuits à capacités commutées, le signal d'entrée doit être maintenu durant toute la période d'échantillonnage. Pour réaliser cette fonction on va donc utiliser un échantillonneur bloqueur (*Sample and Hold : S&H*) ou élément de maintien.

### 8.2.2 Caractéristique classique de l'échantillonneur bloqueur

L'échantillonneur bloqueur peut être représenté par la Figure 8-2.

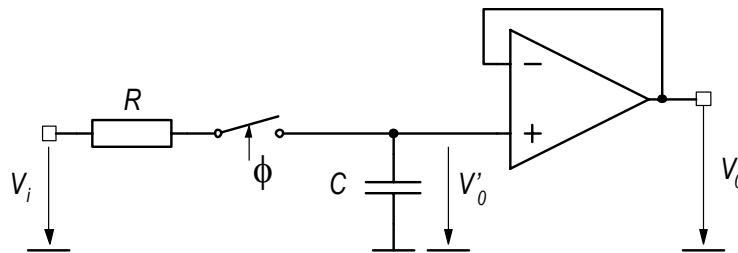


Figure 8-2 : Echantillonneur bloqueur

La constante de temps RC doit être beaucoup plus petite que le temps de fermeture du commutateur. Dans ce cas, la tension mémorisée dans le condensateur après l'ouverture du commutateur est identique à la tension d'entrée à l'instant d'ouverture. Bien entendu le condensateur va se décharger progressivement en raison de son propre courant de fuite et du courant de polarisation de l'amplificateur opérationnel.

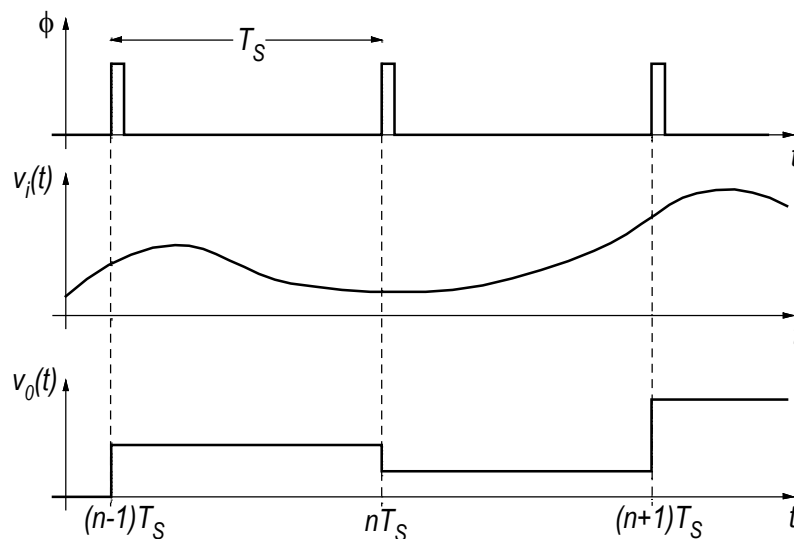


Figure 8-3 : Echantillonneur bloqueur : Signaux d'entrée et de sortie

Dans ce cas, la transformée en z du signal de sortie correspond à la transformée en z du signal d'entrée avec un éléments de maintien d'ordre 0.

### 8.2.3 Caractéristique modifiée de l'échantillonneur bloqueur

En choisissant une constante de temps  $\tau=RC$  beaucoup plus grande que le temps de fermeture  $t_{on}=\Delta$  du commutateur et en faisant l'hypothèse que le signal d'entrée est constant durant ce même temps de fermeture, on peut écrire en s'aidant de la Figure 8-4 :

$$v_0(t' = \Delta) = v_i(t' = 0) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) + v_0(t' = 0) e^{-\frac{\Delta}{RC}} \quad 8-1$$

Sachant que  $RC \gg \Delta$ , on peut simplifier l'expression précédente en faisant une approximation du 1<sup>er</sup> ordre de la fonction exponentielle :  $e^x \cong 1-x$ . De plus en considérant la variable  $t = t' + nT$  comme le temps de référence, on obtient

$$v_0(nT + \Delta) = v_i(nT + \Delta) \frac{\Delta}{RC} + v_0((n-1)T + \Delta) \left( 1 - \frac{\Delta}{RC} \right) \quad 8-2$$

La transformée en z de la relation 8-2 vaut

$$v_0(z) = v_i(z) \frac{\Delta}{RC} + v_0(z) \left( 1 - \frac{\Delta}{RC} \right) z^{-1} \quad 8-3$$

Et finalement la fonction de transfert de l'échantillonneur bloqueur modifié

$$H_{S\&H}(z) = \frac{v_0(z)}{v_i(z)} = \frac{\frac{\Delta}{RC} z}{z - \left( 1 - \frac{\Delta}{RC} \right)} \quad 8-4$$

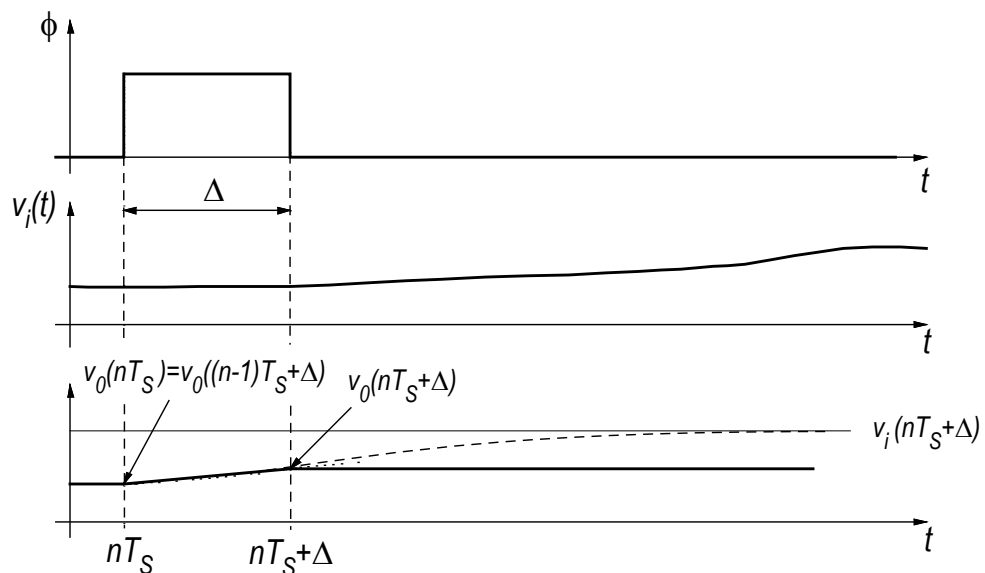


Figure 8-4 : Echantillonneur bloqueur modifié

La réponse harmonique de cette fonction de transfert ( $z=e^{j\omega T_S}$ ) nous donne



$$\begin{aligned}
 H_{S\&H}(e^{j\omega T_s}) &= \frac{\frac{\Delta}{RC}}{1 - \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)e^{-j\omega T_s}} \\
 &= \frac{\frac{\Delta}{RC}}{1 - \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)\cos(\omega T_s) + \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)j\sin(\omega T_s)}
 \end{aligned}
 \tag{8-5}$$

– Amplitude de  $H_{S\&H}(e^{j\omega T_s})$

$$|H_{S\&H}(e^{j\omega T_s})| = \frac{\frac{\Delta}{RC}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)\cos(\omega T_s)}}
 \tag{8-6}$$

– Phase de  $H_{S\&H}(e^{j\omega T_s})$

$$\text{Arg}(H_{S\&H}(e^{j\omega T_s})) = -\text{atan}\left(\frac{\left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)\sin(\omega T_s)}{1 - \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)\cos(\omega T_s)}\right)
 \tag{8-7}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre. La fréquence de coupure correspond à une diminution de l'amplitude de  $\sqrt{2}$ . On peut donc dire que

$$\frac{\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2}{1 + \left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\Delta}{RC}\right)\cos(\omega_c T_s)} = \frac{1}{2}
 \tag{8-8}$$

soit

$$F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi T_s} \text{acos}\left(\frac{1 - \frac{\Delta}{RC} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2}{1 - \frac{\Delta}{RC}}\right)
 \tag{8-9}$$

Pour  $0 < \frac{\Delta}{RC} < 0.1$ , on peut admettre l'approximation suivante

$$F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi T_s} \frac{\Delta}{RC} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{RC}\right)
 \tag{8-10}$$

avec une précision meilleure que 0.5%.

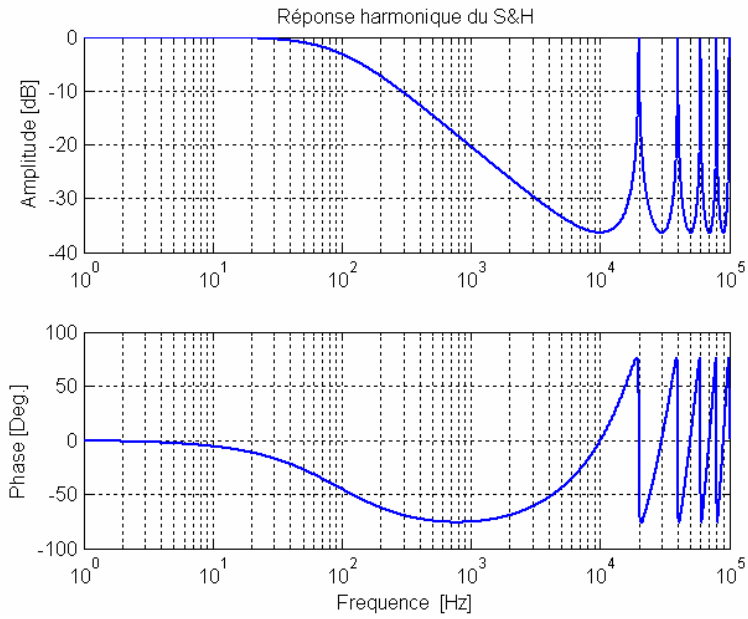


Figure 8-5 : Réponse harmonique de l'échantillonneur bloqueur modifié

Grâce au choix d'une grande constante de temps RC par rapport au temps de fermeture du commutateur, la simple fonction de échantillonneur bloqueur est combinée avec un filtre passe-bas pouvant servir de filtre anti-repliement.

### 8.3 CONSIDÉRATION DE BASE SUR LES CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES

La conception de base du transfert de charge entre condensateurs est abordée dans cette section. L'émulation d'une résistance à l'aide de circuit contenant des commutateurs analogiques et des condensateurs y est développée. Enfin un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre est examiné dans le détail afin d'illustrer les méthodes développées.

#### 8.3.1 Emulation d'une résistance

Il semble que ce soit James Clerk Maxwell qui en 1873 a décrit comment mesurer la résistance d'un galvanomètre en connectant ce dernier en série avec une batterie, un ampèremètre et une capacité dont les connexions étaient croisées périodiquement. En utilisant une approche similaire, il est possible de démontrer la manière d'émuler une résistance à l'aide d'un condensateur et de deux commutateurs. La Figure 8-6 illustre une configuration possible appelée résistance équivalente de la commutation parallèle d'un condensateur.

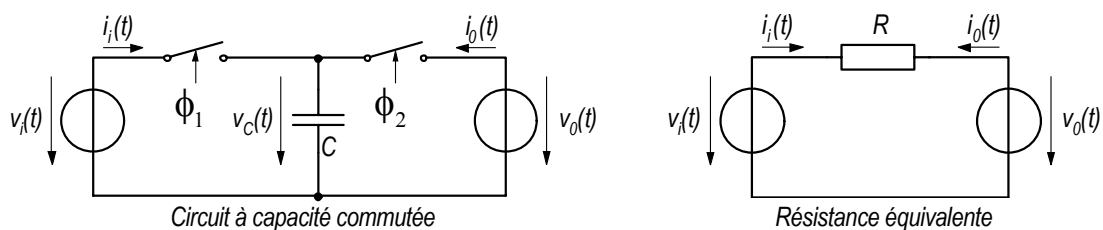


Figure 8-6 : Résistance équivalente de la commutation parallèle d'un condensateur

Le circuit à capacité commutée représenté par la Figure 8-6 (a) est constitué de deux sources de tension  $V_i$  et  $V_o$ , de deux commutateurs analogiques  $SW_1$  et  $SW_2$  commandé par les deux signaux d'horloge  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et d'un condensateur  $C$ . Les commutateurs sont ouverts lorsque leur commande se trouve à l'état 0 et fermé pour l'état 1. Le non recouvrement des signaux d'horloges impose la condition qu'ils ne sont jamais à l'état 1 simultanément. Par conséquent la largeur des impulsions des horloges est légèrement inférieur à leur demi période  $T_s/2$ .

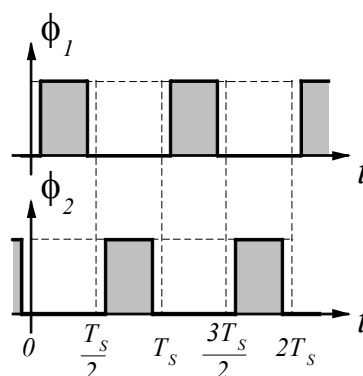


Figure 8-7 : Forme typique des deux phases sans recouvrement des horloges

En faisant l'hypothèse que les amplitudes de sorties des sources de tension  $v_i(t)$  et  $v_o(t)$  ne changent que très peu durant une période d'horloge  $T_s$ , on peut admettre que ces deux amplitudes sont constantes sur un intervalle de temps  $T_s$ .

Le courant moyen dans la source de tension  $V_i$  est donné par la relation

$$I_i = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} i_i(t) dt \quad 8-11$$

Le courant  $i_i(t)$  ne circule que durant l'intervalle de temps  $0 < t < T_S/2$ , on peut modifier la relation précédente comme suit

$$I_i = \frac{1}{T_S} \int_0^{\frac{T_S}{2}} i_i(t) dt \quad 8-12$$

La relation entre charge et courant permet encore d'écrire

$$i_i(t) = \frac{\partial q_i(t)}{\partial t} \quad 8-13$$

Et par conséquent

$$I_i = \frac{1}{T_S} \int_0^{\frac{T_S}{2}} i_i(t) dt = \frac{1}{T_S} \int_0^{\frac{T_S}{2}} dq_i = \frac{q_i\left(\frac{T_S}{2}\right) - q_i(0)}{T_S} \quad 8-14$$

Sachant que la charge dans un condensateur est proportionnelle à la capacité et à la tension à ses bornes, on a

$$q_c(t) = C v_c(t) \quad 8-15$$

A l'aide des relations 8-14 et 8-15 on a finalement

$$I_i = C \frac{v_c\left(\frac{T_S}{2}\right) - v_c(0)}{T_S} = C \frac{v_i\left(\frac{T_S}{2}\right) - v_0(0)}{T_S} \quad 8-16$$

Sachant que, selon l'hypothèse faite plus haut,  $v_i(t)$  et  $v_0(t)$  sont approximativement constants sur une période d'horloge  $T_S$ , on peut encore écrire les deux relations suivantes :

$$v_i(0) \cong v_i\left(\frac{T_S}{2}\right) \cong v_i(T_S) \cong V_i \quad 8-17$$

$$v_0(0) \cong v_0\left(\frac{T_S}{2}\right) \cong v_0(T_S) \cong V_0 \quad 8-18$$

Considérer les amplitudes  $v_i(t)$  et  $v_0(t)$  constant sur une période d'horloge  $T_S$  revient à limiter la fréquence de ces sources à une valeur très inférieure à la fréquence d'horloge  $F$ . En tenant compte des approximations 8-17 et 8-18 et de la relation 8-16 on peut écrire

$$I_i = C \frac{V_i - V_0}{T_S} = \frac{V_i - V_0}{\frac{T_S}{C}} \quad 8-19$$

En observant la Figure 8-6 (b), le courant moyen s'exprime par la loi d'ohm

$$I_i = \frac{V_i - V_0}{R} \quad 8-20$$

On trouve donc ici une équivalence entre les deux circuits sous la forme

$$R = \frac{T_s}{C} \quad 8-21$$

La relation 8-21 montre que le circuit à capacité commutée de type parallèle est équivalent à une résistance si les variations des amplitudes  $v_i(t)$  et  $v_0(t)$  des sources de tension  $V_i$  et  $V_0$  sont négligeables sur une période d'horloge  $T_s$ .

Il est à noter que le circuit à capacité commutée de type parallèle permettant l'émulation d'une résistance est un réseau à trois terminaisons alors que la résistance, sans connexion avec la masse ne contient que deux terminaisons.

La Figure 8-8 montre trois circuits à capacité commutée pouvant émuler une résistance. Le premier (a) est appelé circuit à capacité commutée de type série, le second (b) circuit à capacité commutée de type série-parallèle et le troisième (c) circuit à capacité commutée de type bilinéaire. À noter que les circuits séries et bilinéaire ne comportent, comme la résistance, que deux terminaisons.

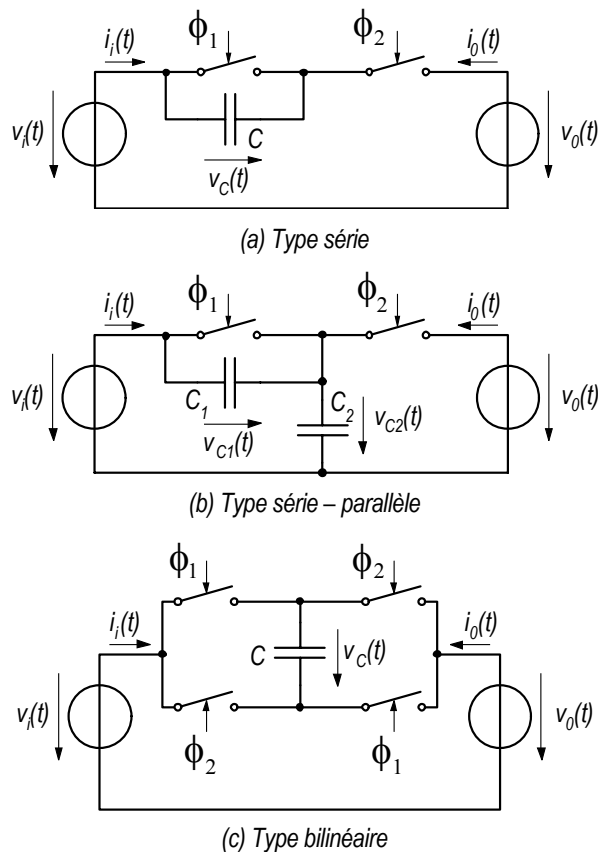


Figure 8-8 : Circuits à capacités commutées émulant une résistance

La résistance équivalente du circuit série est identique à celle du circuit parallèle. Pour le circuit série-parallèle, le courant  $i_i(t)$  est non nul pour les deux phases ou deux demi périodes des horloges  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Il faut donc réécrire la relation 8-11 sous la forme

$$I_i = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} i_i(t) dt = \frac{1}{T_S} \left( \int_0^{\frac{T_S}{2}} i_i(t) dt + \int_{\frac{T_S}{2}}^{T_S} i_i(t) dt \right) \quad 8-22$$

De la relation 8-22, on peut écrire le lien entre le courant moyen  $I_i$  et la charge  $q_i$

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{T_S} \left( \int_0^{\frac{T_S}{2}} i_i(t) dt + \int_{\frac{T_S}{2}}^{T_S} i_i(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T_S} \left( q_2 \left( \frac{T_S}{2} \right) - q_2(0) \right) + \frac{1}{T_S} \left( q_1(T_S) - q_1 \left( \frac{T_S}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad 8-23$$

Puis en tenant compte de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $v_{C1}$  et  $v_{C2}$ ,

$$I_i = \frac{C_2}{T_S} \left( v_{C2} \left( \frac{T_S}{2} \right) - v_{C2}(0) \right) + \frac{C_1}{T_S} \left( v_{C1}(T_S) - v_{C1} \left( \frac{T_S}{2} \right) \right) \quad 8-24$$

En tenant compte de l'hypothèse sur les variations lentes des tensions  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ , on a :

$$v_{C1} \left( \frac{T_S}{2} \right) = 0 \quad 8-25$$

$$v_{C1}(T_S) = V_0 - V_i$$

$$v_{C2}(0) = V_0$$

$$v_{C2} \left( \frac{T_S}{2} \right) = V_i \quad 8-26$$

appliqués à la relation 8-24

$$I_i = C_2 \frac{V_i - V_0}{T_S} + C_1 \frac{V_i - V_0 - 0}{T_S} = \frac{V_i - V_0}{\frac{T_S}{C_1 + C_2}} \quad 8-27$$

et par conséquent la résistance équivalente vaut dans ce cas

$$R = \frac{T_S}{C_1 + C_2} \quad 8-28$$

Le Tableau 8-1 donne un aperçu des diverses possibilités d'émulation de résistances par des capacités commutées.

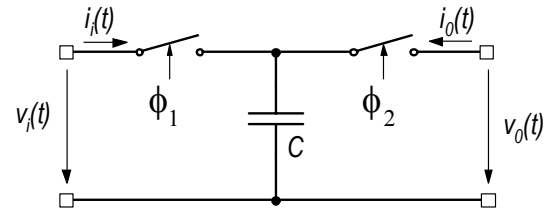
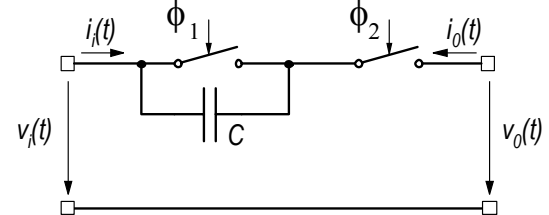
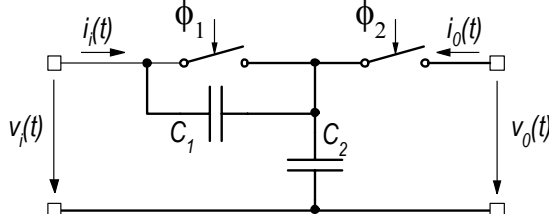
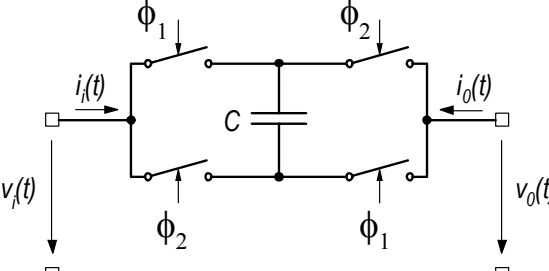
Type de circuit à capacités commutées	Topologie du circuit	Résistance équivalente
Parallèle		$\frac{T_s}{C}$
Série		$\frac{T_s}{C}$
Série - parallèle		$\frac{T_s}{C_1 + C_2}$
Bilinéaire		$\frac{T_s}{4C}$

Tableau 8-1 : Résistances équivalentes en fonction du type de circuit à capacités commutées

### 8.3.2 Précision des circuits à capacités commutées

La précision de la réponse temporelle ou fréquentielle d'un circuit traitant un signal analogique est directement liée aux diverses constantes de temps intégrées dans ce dernier.

#### 8.3.2.1 Exemple : Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

Pour illustrer cette affirmation, considérons un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre.

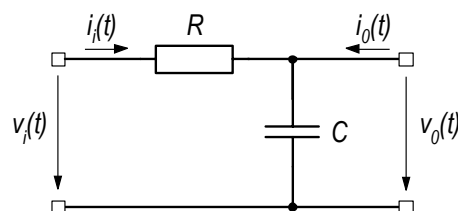


Figure 8-9 : Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

La fonction de transfert harmonique liant la tension de sortie à celle d'entrée est donnée par la relation

$$H(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{j\omega R_1 C_2 + 1} = \frac{1}{j\omega \tau_c + 1} \quad 8-29$$

où  $\tau_c = R_1 C_2$  est appelée constante de temps du circuit. La précision de  $\tau_c$  est donnée par l'expression

$$\frac{\partial \tau_c}{\tau_c} = \frac{\partial(R_1 C_2)}{R_1 C_2} = \frac{\partial R_1}{R_1} + \frac{\partial C_2}{C_2} \quad 8-30$$

On voit que la précision sur la constante de temps  $\tau_c$  est la somme des précisions de chaque composant constituant le circuit soit  $R_1$  et  $C_2$ . En technologie CMOS traditionnelle, la précision va varié entre 5% et 20%, ceci en fonction du type de composants et de leur taille sur le silicium. Cette précision est insuffisante pour un grand nombre d'applications de traitement du signal.

En utilisant un circuit à capacités commutées, et en émulant  $R_1$  par un circuit de type parallèle, la constante de temps  $\tau_D$  prend, dans ce cas, la forme

$$\tau_D = \left( \frac{T_S}{C_1} \right) C_2 = \left( \frac{1}{F_S C_1} \right) C_2 \quad 8-31$$

où  $F_S$  est la fréquence de l'horloge (fréquence d'échantillonnage). La précision sur la constante de temps vaut alors

$$\frac{\partial \tau_D}{\tau_D} = \frac{\partial C_2}{C_2} - \frac{\partial C_1}{C_1} - \frac{\partial F_S}{F_S} \quad 8-32$$

Ce résultat est extrêmement intéressant. Il indique que la précision de la constante de temps du circuit à capacités commutées dépend des précisions des condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  et de la fréquence d'horloge  $F_S$ . Sachant que la précision de la fréquence d'horloge peut être très grande, la précision globale de la constante de temps  $\tau_D$  est inférieure à 0.1% en technologie CMOS. Cette précision est en générale bien suffisante pour la plupart des applications.

### 8.3.3 Analyse du contrôle de circuits à capacités commutées à l'aide de deux horloges

Les circuits à capacités commutées sont souvent appelés circuits analogiques échantillonnés. Ceci en raison de la caractéristique continue en amplitude et discrète en temps. Un signal analogique quelconque  $v(t)$  est en fait échantillonné et maintenu pour une demi période d'horloge  $T_S/2$ . Le signal résultant de cette échantillonnage et maintien est nommé  $v^\#(t)$ . La Figure 8-10 montre clairement que le signal  $v^\#(t)$  est le résultat de la somme des échantillonnage et du maintien de  $v(t)$  selon les deux phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sans recouvrement de l'horloge.

$$v^\#(t) = v^{\phi_1}(t) + v^{\phi_2}(t) \quad 8-33$$

Les exposants  $\phi_1$  et  $\phi_2$  indique la phase sur laquelle le signal est échantillonné et maintenu. En un instant d'échantillonnage quelconque  $t=nT_S/2$ , on peut écrire

$$v^\# \left( n \frac{T_S}{2} \right) = v^{\phi_1} \left( n \frac{T_S}{2} \right) + v^{\phi_2} \left( n \frac{T_S}{2} \right) \quad 8-34$$



où pour la phase  $\phi_1, n=0,2,4,\dots$  et pour la phase  $\phi_2, n=1,3,5,\dots$   
 Pour pouvoir analyser un circuit à capacités commutées, il est nécessaire de travailler avec la transformée en z. Dans ce cas l'expression temporelle 8-34 devient :

$$v^\#(z) = v^{\phi_1}(z) + v^{\phi_2}(z) \tag{8-35}$$

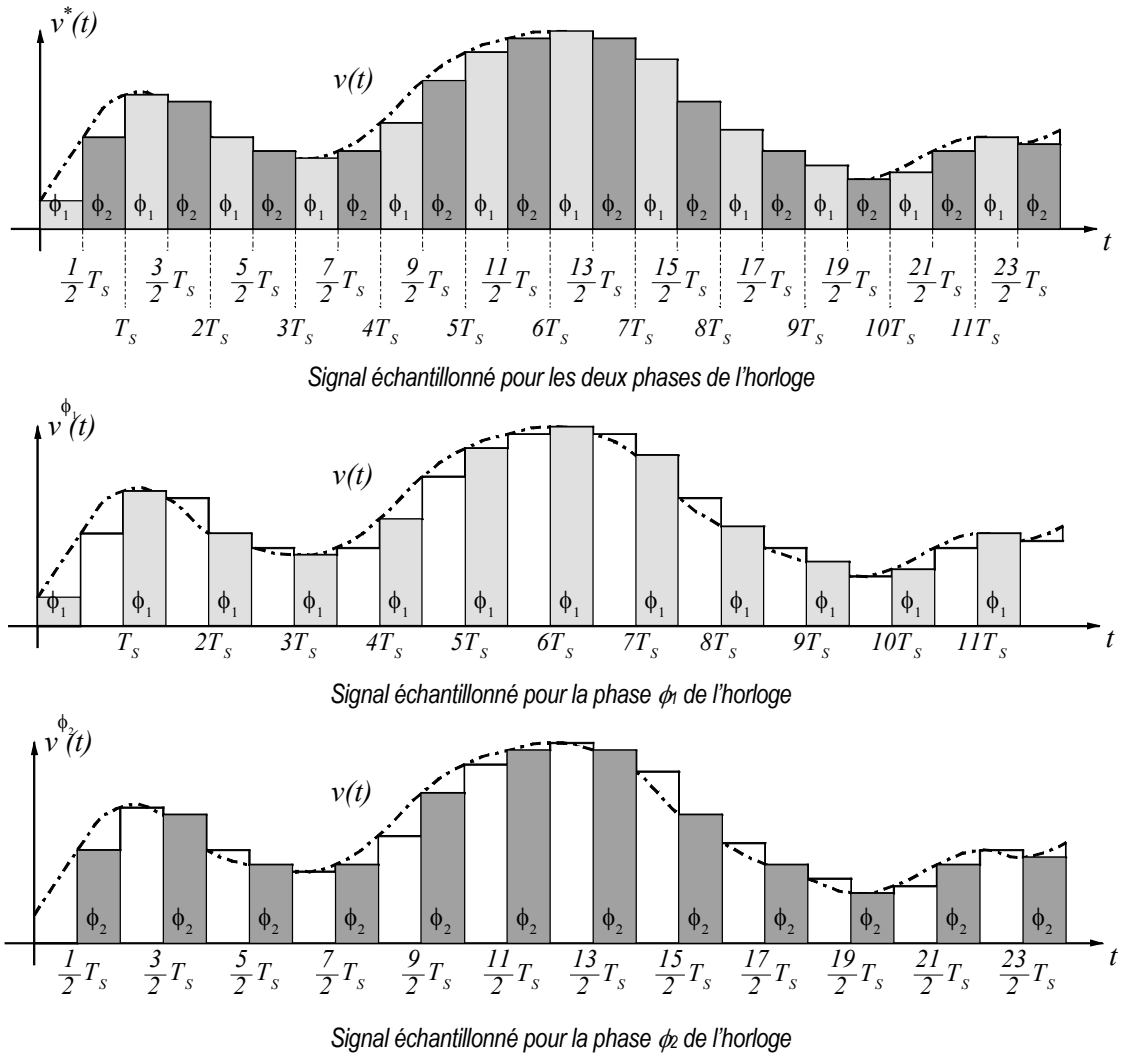


Figure 8-10 : Echantillonnage d'un signal

La Figure 8-11 représente un circuit à capacités commutées dans le domaine z. Le système étant linéaire, il est possible de décomposer les tension d'entrée  $v_i(z)$  et de sortie  $v_0(z)$  en composantes dépendant des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Selon le choix des phases sélectionnées, on peut écrire 4 fonctions de transfert différentes, soit

$$H^{jk}(z) = \frac{v_0^k(z)}{v_i^j(z)} \tag{8-36}$$

où j et k représentent soit la phase  $\phi_1$ , soit la phase  $\phi_2$ . Par exemple  $H^{\phi_2\phi_1}(z) = \frac{v_0^{\phi_1}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)}$ .

On peut également écrire de manière plus complète :

$$H(z) = \frac{v_0(z)}{v_i(z)} = \frac{v_0^{\phi_1}(z) + v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_1}(z) + v_i^{\phi_2}(z)} \quad 8-37$$

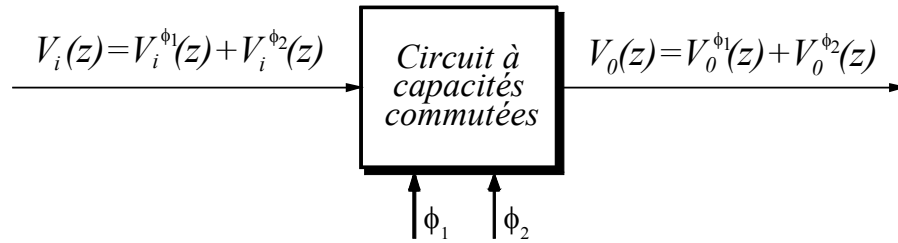


Figure 8-11 : Représentation d'un circuit à capacités commutées dans le domaine z

L'approche analytique des circuits à capacités commutées utilisant une horloge à deux phases sans recouvrement consiste à étudier le circuit dans le domaine temporel pour une phase donnée. Les équations, des circuits constitués que de condensateurs et de sources de tension, sont algébriquement simples dans le domaine temporel. Une fois la période d'une phase analysée, on connaît les conditions initiales de la phase suivante. On peut ensuite passer dans le domaine échantillonné z afin de déterminer la fonction de transfert présentant un intérêt. Il est important de définir avec précision l'instant d'observation pour chaque phase de l'horloge. Pour des raisons évidentes le choix se porte soit sur le début ou la fin d'une phase d'horloge. La solution est d'être cohérent pour une analyse donnée. Dans l'exemple qui va suivre, l'instant est défini au début de chaque période de chaque phase.

**8.3.4 Exemple : Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre à capacité commutée**

Le but de cet exemple est d'utiliser l'approche analytique faite au paragraphe précédent pour déterminer la fonction de transfert en z d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre. Le circuit est conçu à partir du filtre passe-bas RC passif de la Figure 8-9.

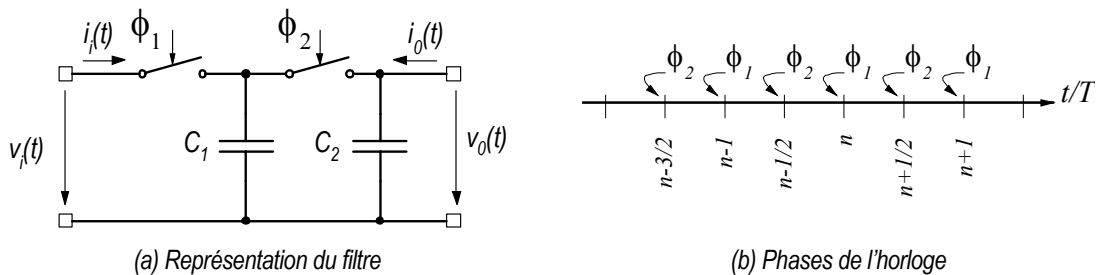
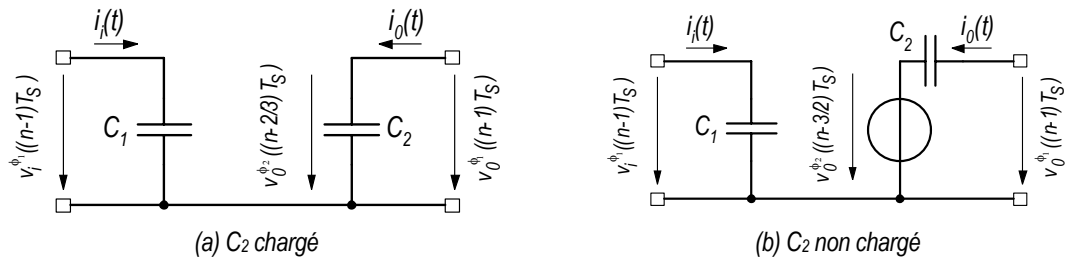


Figure 8-12 : Filtre passe-bas à capacité commutée

**8.3.4.1 Phase \phi\_1 active : (n-1)T\_S < t < (n-1/2) T\_S**

Le circuit équivalent correspond à la Figure 8-13

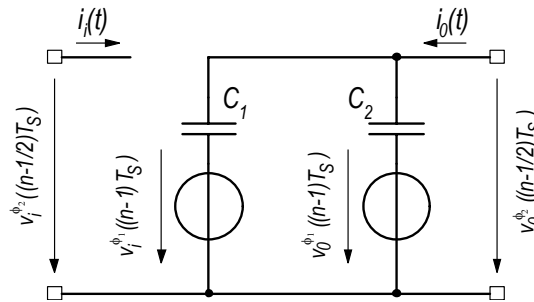
La Figure 8-13 (a) montre que la tension aux bornes de C\_1 est identique à la tension de la source d'entrée à l'instant v\_i^{\phi\_1}((n-1)T\_S) (il faut se souvenir que la variation de la tension d'entrée est négligeable durant une demi période T\_S/2). Dans le même intervalle de temps C\_2 est non connectée (haute impédance) et par conséquent la tension à ces bornes reste à la valeur fixée au temps v\_0^{\phi\_2}((n-3/2)T\_S). A la Figure 8-13 (a), C\_2 est remplacé par une source de tension (condition initiale pour la tension aux bornes du condensateur) de valeur v\_0^{\phi\_2}((n-3/2)T\_S) et du même condensateur C\_2 mais non chargé (tension nulle à ses bornes).

Figure 8-13 : Filtre passe-bas à capacité commutée : Phase  $\phi_1$  active

On peut maintenant considérer la phase suivante de l'horloge.

#### 8.3.4.2 Phase $\phi_2$ active : $(n-1/2)T_s < t < nT_s$

Durant cette phase le condensateur  $C_1$ , dont la tension aux bornes est à  $v_i^{\phi_1}((n-1)T_s)$ , est connecté en parallèle avec le condensateur  $C_2$ . Le circuit équivalent correspondant à la phase  $\phi_2$  est représenté à la Figure 8-14.

Figure 8-14 : Filtre passe-bas à capacité commutée : Phase  $\phi_2$  active

A l'instant de commutation, on admet qu'aucun des deux condensateurs n'est chargé. On peut définir la tension de sortie par le principe de superposition selon la relation

$$v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_1}((n-1)T_s) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_o^{\phi_1}((n-1)T_s) \quad 8-38$$

A la fin de la période  $T_s$ , la tension de sortie reste stabilisée à

$$v_o^{\phi_1}(nT_s) = v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_s) \quad 8-39$$

Et donc finalement on obtient

$$v_o^{\phi_1}(nT_s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_1}((n-1)T_s) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_o^{\phi_1}((n-1)T_s) \quad 8-40$$

#### 8.3.4.3 Fonction de transfert en $H^{\phi_1 \phi_1}$

La transformée en  $z$  de la relation 8-40 prend la forme

$$z^{nT} v_o^{\phi_1}(z) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} z^{(n-1)T} v_i^{\phi_1}(z) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} z^{(n-1)T} v_o^{\phi_1}(z) \quad 8-41$$

Et après simplification

$$H^{\phi_1\phi_1}(z) = \frac{v_0^{\phi_1}(z)}{v_i^{\phi_1}(z)} = \frac{\frac{C_1}{C_1 + C_2}}{z - \frac{C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)z - \frac{C_2}{C_1}} \stackrel{\alpha = \frac{C_2}{C_1}}{=} \frac{1}{(1 + \alpha)z - \alpha} \quad 8-42$$

L'exemple ci-dessus illustre l'approche à adopter pour déterminer la fonction de transfert en  $z$  d'un circuit à capacités commutées. En générale, on cherche la fonction correspondant à une seule phase, soit  $H^{\phi_1\phi_1}(z)$  ou  $H^{\phi_2\phi_2}(z)$

La réponse harmonique du filtre précédent se détermine en posant  $z = e^{j\omega T}$ . On a alors :

$$H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{(1 + \alpha)e^{j\omega T_s} - \alpha} = \frac{1}{(1 + \alpha)\cos(\omega T_s) - \alpha + j(1 + \alpha)\sin(\omega T_s)} \quad 8-43$$

Cette fonction est de type complexe pour laquelle on peut déterminer l'amplitude

$$\left| H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_s}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos(\omega T_s))}} \quad 8-44$$

et la phase

$$\text{Arg}\left[ H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_s}) \right] = -\text{atan}\left[ \frac{\sin(\omega T_s)}{\cos(\omega T_s) - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right] \quad 8-45$$

Comme déjà mentionné, la fréquence  $F$  du signal appliqué à l'entrée du circuit est beaucoup plus petite que la fréquence de l'horloge  $F_s$ . On parle de suréchantillonnage (*oversampling*).

$$F \ll F_s = \frac{1}{T_s} \Rightarrow \omega = 2\pi F \ll \frac{2\pi}{T_s} \quad 8-46$$

Dès lors, il est possible de faire les simplifications suivantes

$$H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_s}) \stackrel{\substack{\cos(\omega T_s) \cong 1 \\ \sin(\omega T_s) \cong \omega T_s}}{=} \frac{1}{1 + j(1 + \alpha)\omega T_s} \quad 8-47$$

En comparant les fonctions de transfert harmonique des filtres passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre à capacités commutées (relation 8-47) et RC classique (relation 8-29), on en tire une relation sur les constante de temps

$$\tau_c = (1 + \alpha)T_s \quad 8-48$$

soit

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\tau_c}{T_s} - 1 = F_s \tau_c - 1 = \frac{F_s}{\omega_{C[3dB]}} - 1 = \frac{1}{2\pi} \frac{F_s}{F_{C[3dB]}} - 1 \quad 8-49$$

#### 8.3.4.4 Comparaison entre circuit RC et circuit à capacités commutées

A partir de l'analyse précédente, comparons les réponses harmoniques des deux filtres pour de pulsation  $\omega$  du signal d'entrée allant de 0 à la pulsation d'échantillonnage  $\omega_s$ .

En partant de l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} F_{C[-3dB]} &= 1 \text{ kHz} && : \text{Fréquence de coupure du filtre} \\ F_S &= 20 \text{ kHz} && : \text{Fréquence d'horloge du circuit à capacités commutées} \end{aligned}$$

On a

$$\alpha = \frac{20}{2\pi} - 1 = 2.1813$$

8-50

$$C_2 = 2.1813C_1$$

Et par conséquent, on peut tracer la réponse harmonique (amplitude et phase) des fonctions de transfert du filtre passe-bas analogique (RC) et du filtre à capacités commuté (SC).

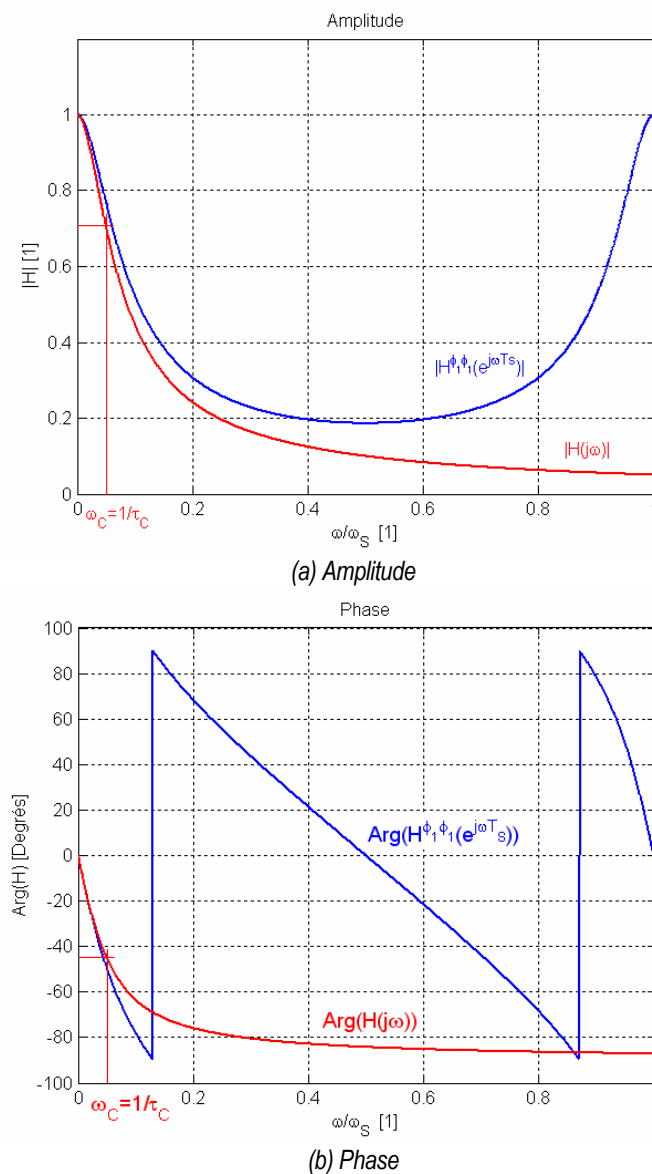


Figure 8-15 : Réponse harmonique

La comparaison entre les deux filtres montrent que pour les basses fréquences, les réponses harmoniques sont proches l'une de l'autre. Par contre, pour des fréquences plus élevées, la réponse harmonique du filtre à capacités commutées s'écarte notablement de celle du filtre analogique. L'examen de la réponse harmonique du filtre à capacités commutées montre que la réponse en amplitude présente un minimum à la moitié de la fréquence d'échantillonnage

(fréquence de Nyquist). Pour améliorer la similitude des deux réponses, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage du filtre à capacités commutées. Les mêmes constatations peuvent être faites concernant la phase.

En réalité, la réponse harmonique du filtre à capacités commutées est encore différente. En effet, la variation de la fréquence du signal d'entrée telle qu'elle est faite à la Figure 8-15 ne respecte pas l'hypothèse faite sur la fréquence du signal d'entrée.

La méthode d'analyse proposée n'est donc pas totalement fiable pour des circuits complexes. Heureusement l'association de capacités commutées et d'amplificateurs opérationnels permet de limiter la complexité d'analyse des circuits pour des fréquences du signal d'entrée au moins 20 à 50 fois inférieures à la fréquence d'échantillonnage.

## 8.4 AMPLIFICATEURS À CAPACITÉS COMMUTÉES

Cette section est dédiée à l'étude de l'utilisation de capacités commutées pour la réalisation d'amplificateurs de tension. Comme pour les circuits classiques c'est la contre réaction négative qui est utilisée. Pour des comparaisons, l'étude comme par les montages amplificateurs – résistances. L'influence de la fonction de transfert (1<sup>er</sup> ordre) des amplificateurs opérationnels (gain statique non infini et fréquence de coupure) est examinée afin d'examiner les limites en fréquence des deux types de topologie.

### 8.4.1 Amplificateur sans commutation

#### 8.4.1.1 Etude dans le domaine continu

Les amplificateurs sans circuit de commutation se prête naturellement à une étude dans le domaine continu (Transformée de Laplace)

##### 8.4.1.1.1 Amplificateur avec contre réaction par résistances

La Figure 8-16 illustre les deux montages de base d'amplification de tension.

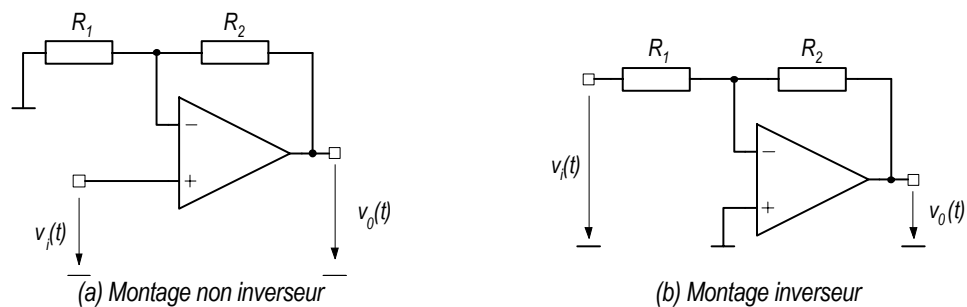


Figure 8-16 : Amplificateur idéal avec contre réaction tension - tension

- Gain idéal du montage non inverseur

$$A^+ = \frac{V_0}{V_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad 8-51$$

- Gain idéal du montage inverseur

$$A^- = \frac{V_0}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \quad 8-52$$

Les limitations du gain statique  $A_0$  et de la fréquence de coupure  $F_C$  ont une influence sur les fonctions de transfert des montages inverseur et non inverseur.

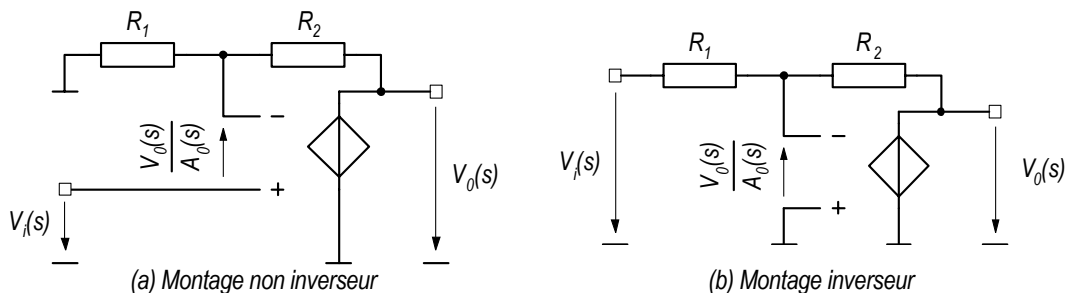


Figure 8-17 : Amplificateur non idéal avec contre réaction tension - tension

La Figure 8-17 montre que l'amplificateur opérationnel non idéal peut être modélisé par une source de tension commandée en tension.

Dans ce cas, on obtient :

- Fonction de transfert de la source de tension commandée et tension

$$A_{AO}(s) = \frac{A_0 \omega_C}{s + \omega_C} = \frac{GBW}{s + \omega_C} \underset{\omega \gg \omega_C}{\cong} \frac{GBW}{s} \quad 8-53$$

Avec GBW, produit du gain statique par la largeur de bande du signal soit la fréquence de transition  $F_{T[0dB]}$

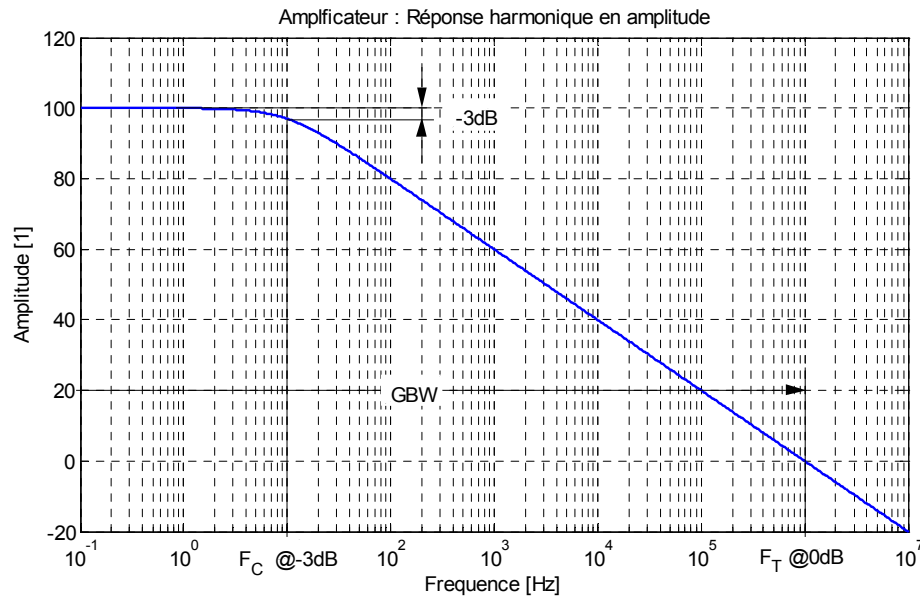


Figure 8-18 : Caractéristique d'amplification de l'amplificateur opérationnel non idéal

- Fonction de transfert du montage non inverseur

$$\begin{aligned} A^+(s) &= \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{A_{AO}(s)}{1 + A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 + A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1} G_{ACL}(s) \end{aligned} \quad 8-54$$

- Fonction de transfert du montage inverseur

$$\begin{aligned} A^-(s) &= \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{AO}(s)}{1 + A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 + A_{AO}(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} G_{ACL}(s) \end{aligned} \quad 8-55$$

Les relations 8-54 et 8-55 montrent que la précision sur le gain en tension obtenu en considérant des amplificateurs opérationnels idéaux dépend fortement de leur gain statique  $A_0(0)$  et de la fréquence de coupure  $F_C$ .



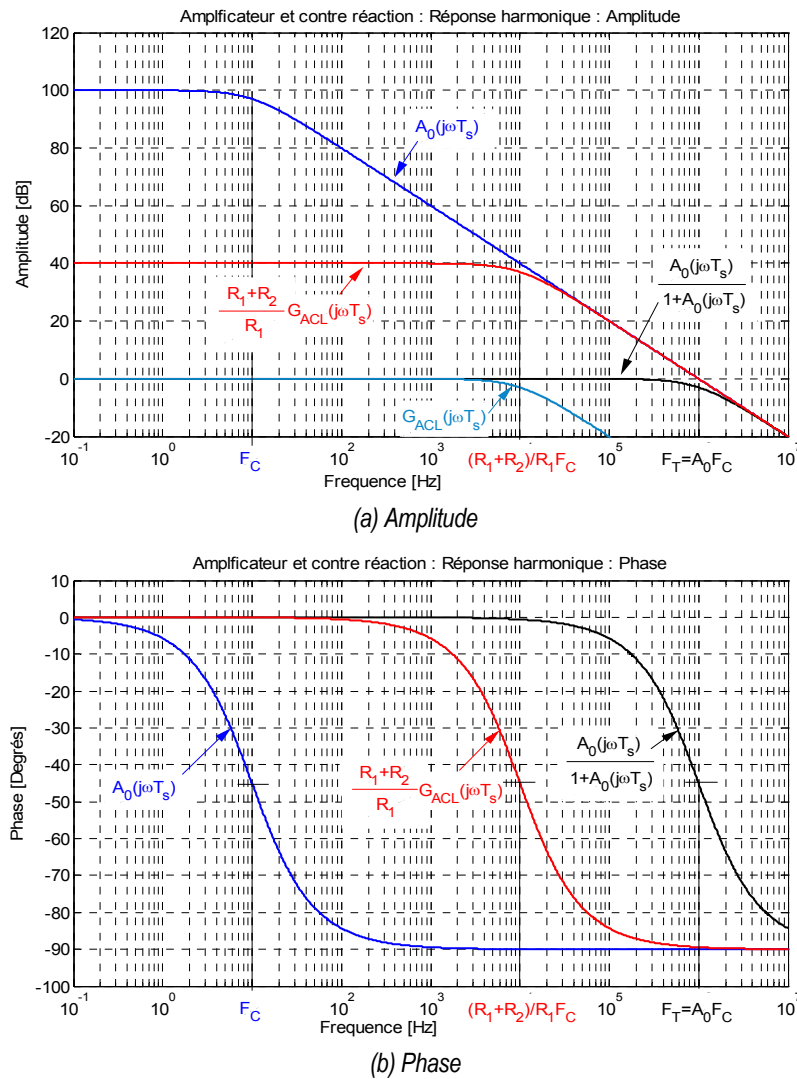


Figure 8-19 : Réponse harmonique pour le montage non inverseur

8.4.1.1.2 Amplificateur avec contre réaction par capacités

Avant d'étudier les amplificateurs à capacités commutées, il est intéressant d'observer les caractéristiques des amplificateurs à contre réaction capacitive.

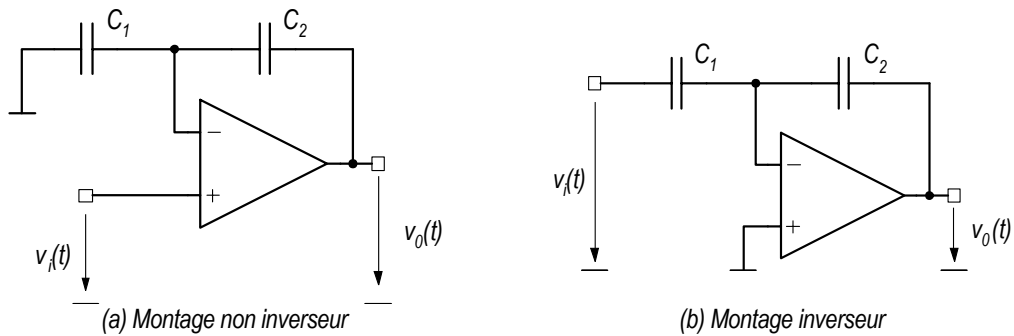


Figure 8-20 : Amplificateur de tension avec contre réaction capacitives

En reprenant les expressions du paragraphe précédent, on a

- Fonction de transfert du montage non inverseur

$$\begin{aligned}
 A^+(s) &= \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{A_{A0}(s)}{1 + A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \frac{A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}}{1 + A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} \\
 &= \frac{C_1 + C_2}{C_2} G_{ACL}(s)
 \end{aligned}
 \tag{8-56}$$

- Gain idéal du montage inverseur

$$\begin{aligned}
 A^-(s) &= \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{-C_1}{C_1 + C_2} A_{A0}(s)}{1 + A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}}{1 + A_{A0}(s) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} \\
 &= -\frac{C_1}{C_2} G_{ACL}(s)
 \end{aligned}
 \tag{8-57}$$

Les relations trouvées ne montrent aucune différence entre les contre réactions à résistances ou à condensateurs. Dans la réalité ce sont les courants de fuite des condensateurs qui vont provoquer une modification de la réponse temporelle en basse fréquence. En effet en appliquant une tension constante à l'entrée du montage, on peut observer une dérive de la tension de sortie jusqu'à une des tensions de saturation de l'amplificateur. La condition incontournable pour que les relations 8-56 et 8-57 soient valables est la redéfinition périodique des tensions aux bornes de chaque condensateur. Dans le cas de circuits à capacités commutées, il faut que la tension aux bornes des condensateurs soit redéfinie une fois par période de commutation. De telles exigences sont parfaitement compatibles avec les circuits à capacités commutées.

## 8.4.2 Amplificateur à capacités commutées.

### 8.4.2.1 Etude dans le domaine échantillonné.

Vu le caractère discontinu des circuits à capacités commutées, l'étude de ces derniers se fait dans le domaine échantillonné (Transformée en z).

L'émulation d'une résistance par une ou plusieurs capacités commutées et la topologie des amplificateurs de tension avec résistance de contre réaction conduit tout naturellement aux circuits à capacités commutées.

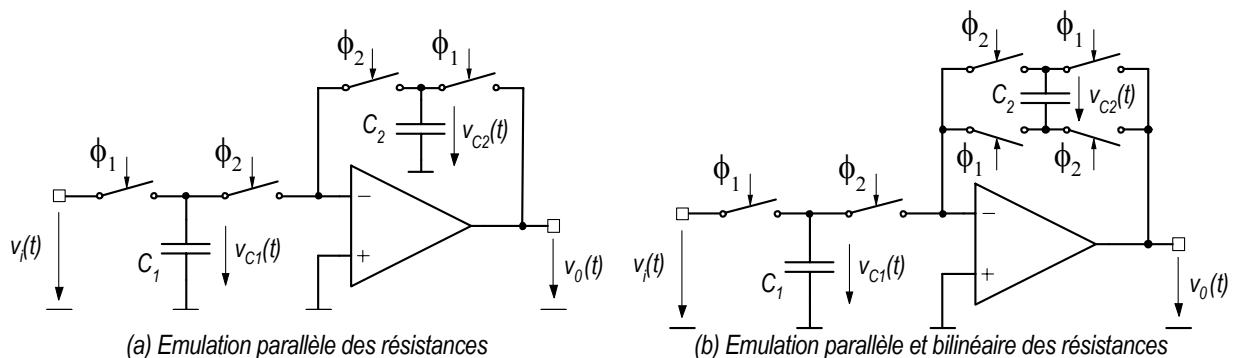


Figure 8-21 : Amplificateur inverseur de tension à capacités commutées

La Figure 8-21 (a) illustre le cas d'un montage inverseur en utilisant une émulation de type série pour les résistances. Le montage de la Figure 8-21 (a) présente un problème durant la

phase  $\phi_2$  de l'horloge. En effet la sortie de l'amplificateur n'est plus reliée au circuit de contre réaction ce qui provoque de forte fluctuation de la tension de sortie. Ce comportement peut être contourné en utilisant une émulation bilinéaire de la résistance placée entre la sortie et l'entrée (-) de l'amplificateur. La Figure 8-21 (b) montre le circuit résultant.

L'émulation d'une résistance par un circuit bilinéaire requiert 4 commutateurs, En gardant en permanence les commutateurs « $\phi_2$ » fermés, il est possible de modifier le circuit tel que présenté à la Figure 8-22. L'étude de ce circuit est identique à celle proposée au §8.3.4.

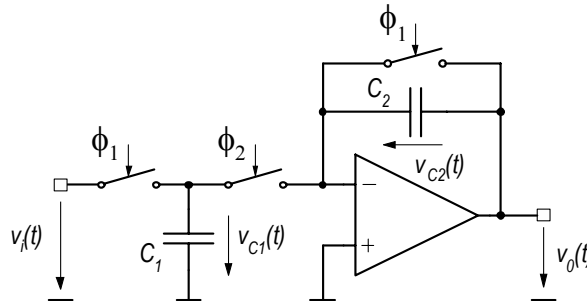


Figure 8-22 : Amplificateur de tension à capacités commutées

#### 8.4.2.2 Phase $\phi_1$ active : $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Le circuit correspondant à la phase  $\phi_1$  active est illustré à la Figure 8-23

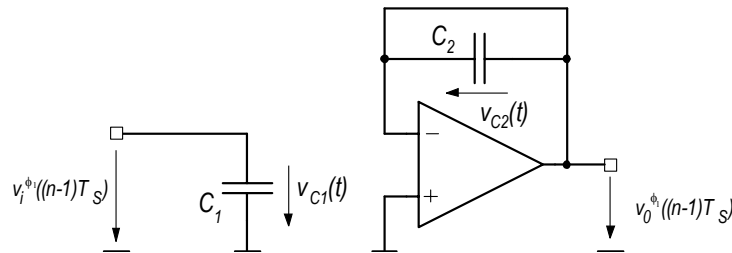


Figure 8-23 : Amplificateur à capacités commutées : Phase  $\phi_1$  active

La tension aux bornes de  $C_1$  est identique à la tension de la source d'entrée à l'instant  $v_i^{\phi_1}((n-1)T_S)$ . Dans le même intervalle de temps,  $C_2$  est court-circuitée et par conséquent la tension à ces bornes vaut  $v_o^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0$ . On peut maintenant considérer la phase suivante de l'horloge

#### 8.4.2.3 Phase $\phi_2$ active : $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

Durant cette phase le condensateur  $C_1$ , dont la tension aux bornes est à  $v_i^{\phi_1}((n-1)T_S)$ , est connecté à l'entrée (-) de l'amplificateur (masse virtuelle). Le circuit équivalent correspondant à la phase  $\phi_2$  est représenté à la Figure 8-14.

On peut définir la tension de sortie en utilisant le principe de transfert de charge. En effet le condensateur  $C_1$  voit sa charge passer à 0 (connexion entre la masse et la masse virtuelle). Cette charge ne pouvant s'écouler qu'au travers du condensateur  $C_2$ , on peut écrire

$$C_2 v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = -C_1 v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-58$$

Il faut se souvenir que la variation de la tension d'entrée est négligeable durant une demi période  $T_S/2$  et par conséquent :

$$v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \quad 8-59$$

La relation 8-58 devient

$$C_2 v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = -C_1 v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \quad 8-60$$

La transformée en z donne

$$C_2 v_0^{\phi_2}(z) z^{n-1/2} = -C_1 v_i^{\phi_2}(z) z^{n-3/2} \quad 8-61$$

Et donc finalement on obtient

$$v_0^{\phi_2}(z) = -\frac{C_1}{C_2} v_i^{\phi_2}(z) z^{-1} \quad 8-62$$

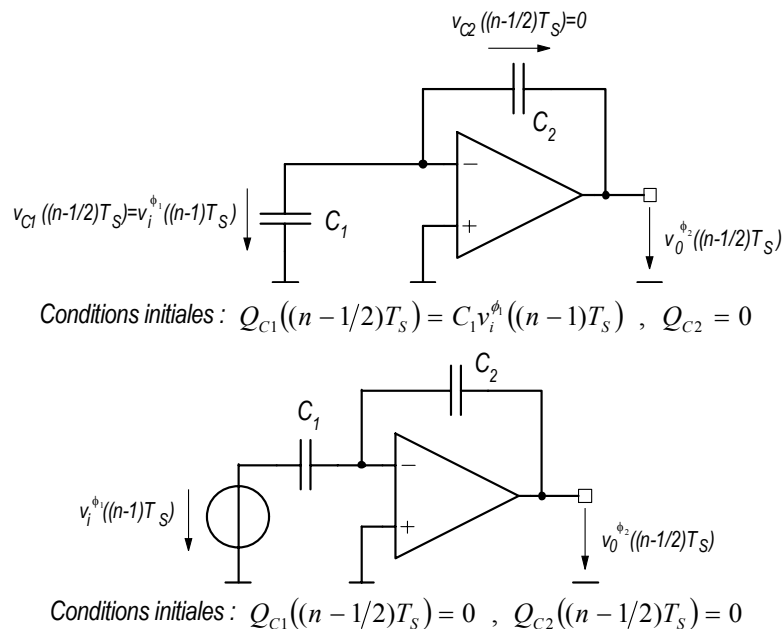


Figure 8-24 : Amplificateur à capacités commutées : Phase  $\phi_2$  active

#### 8.4.2.4 Fonction de transfert en $H^{\phi_2\phi_2}$

De la relation 8-62, on en déduit la fonction de transfert  $H^{\phi_2\phi_2}$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = -\frac{C_1}{C_2} z^{-1} \quad 8-63$$

#### 8.4.2.5 Comparaison entre amplificateurs inverseurs à résistances et à capacités commutées

Dans un premier temps nous ferons l'hypothèse que l'amplificateur opérationnel est idéal. Dans ce cas la réponse harmonique de l'amplificateur à résistance présente une amplitude  $A(j\omega) = R_2/R_1$  et une phase constante de  $\text{Arg}(A(j\omega)) = \pm 180^\circ$ . L'amplitude et la phase sont indépendantes de la fréquence. Pour l'amplificateur à capacités commutées, la réponse harmonique est obtenue en remplaçant  $z$  par  $e^{j\omega T_S}$  dans la relation 8-63.

$$H^{\phi_2\phi_2}(j\omega) = -\frac{C_1}{C_2} e^{j\omega T_s} \quad 8-64$$

L'amplitude ( $-C_1/C_2$ ) de la réponse harmonique est comparable à celle de l'amplificateur à résistance ( $-R_2/R_1$ ). Par contre à la phase de  $\pm 180^\circ$  est ajouté un déphasage variant linéairement avec la fréquence (retard constant). Lorsque la fréquence est la moitié de la fréquence de l'horloge (fréquence de Nyquist), le déphasage additionnel est de  $-180^\circ$ . Dans la plupart des cas, ce déphasage n'est pas gênant, exception faite lorsque l'amplificateur est utilisé dans une boucle de contre réaction. En effet dans ce cas l'augmentation du déphasage peut provoquer une instabilité du système bouclé.

#### 8.4.2.6 Modification de la topologie

Ce paragraphe décrit la modification à apporter à la topologie du circuit amplificateur à capacités commutées de manière à s'affranchir des capacités parasites liées à la structure des capacités intégrées.

##### 8.4.2.6.1 Capacités intégrées

Les capacités intégrées en technologie CMOS pour les circuits à capacités commutées sont réalisées selon la structure illustrée à Figure 8-25

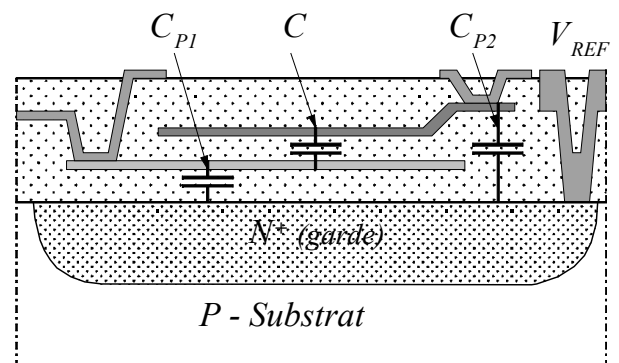


Figure 8-25 : Structure des capacités intégrées en technologie CMOS

Ce type d'implantation des capacités garantit un comportement linéaire pour une large plage de tension. L'inconvénient majeur de l'intégration de capacités réside dans leur faible précision absolue ainsi que dans les capacités parasites associées.

Les valeurs absolues des capacités intégrées varient de  $\pm 30\%$  autour de leur valeur nominale. Par contre l'appairage entre deux capacités de même valeur est de l'ordre de  $0.2\%$ . Les surfaces actives présentent des capacités parasites contre le substrat, Pour la surface active inférieure, cette capacité est de l'ordre de  $10\%$  de la capacité  $C$  ( $C_{p1}=C/10$ ) et  $1\%$  pour la surface supérieure ( $C_{p2}=C/100$ ). Dans le but de réduire les effets de ces capacités parasites  $C_{p1}$  et  $C_{p2}$  sur la fonction de transfert du circuit à capacités commutées, il est d'usage de connecter la plaque supérieure sur l'entrée (-) de l'amplificateur (masse virtuelle) et la plaque inférieure sur un nœud de basse impédance comme par exemple la sortie d'un amplificateur opérationnel ou une source de tension. De plus, une zone  $N^+$ , polarisée avec une tension de référence stable est placée sous les parties isolantes de la capacité  $C$  de manière à réduire le bruit du substrat couplé aux capacités parasites.

### 8.4.2.7 Transrésistance à capacité commutée

En utilisant la structure de la Figure 8-26, on voit que les capacités parasites de la capacité  $C$  n'ont pas d'influence sur le circuit. En effet, en se référant à la Figure 8-26 (a) lorsque la phase  $\phi_1$  est active les capacités  $C_p$  sont court-circuitées et ne peuvent par conséquent pas se charger. Durant la phase  $\phi_2$  la capacité parasite d'entrée est connectée à la source  $v_i(t)$  et celle de sortie est toujours court-circuitée. Même si la capacité parasite d'entrée est chargée, lors de la phase suivante ( $\phi_1$ ), elle est à nouveau court-circuitée et sa charge est donc annulée.

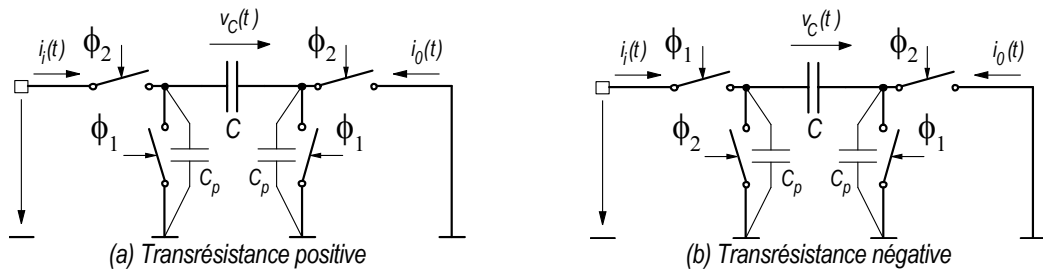


Figure 8-26 : Transrésistance à capacité commutée

On peut tenir le même raisonnement avec le montage à transrésistance négative (Figure 8-26 (b)). La fonction de transfert intéressante correspond à

$$R_T = \frac{v_i(t)}{i_0(t)} = \frac{V_i}{I_0} \quad 8-65$$

Comme jusqu'ici, on suppose que la tension d'entrée  $v_i(t)$  est constante sur une période d'horloge.

- Montage à transrésistance positive

Le courant moyen de sortie  $I_0$  peut donc être exprimé par la relation

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{T_s} \int_{\frac{T_s}{2}}^{T_s} i_0(t) dt = \frac{q_0(T_s) - q_0(T_s/2)}{T_s} = C \frac{v_C(T_s) - v_C(T_s/2)}{T_s} \\ &= C \frac{v_C(T_s) - 0}{T_s} = C \frac{v_C(T_s) - 0}{T_s} = \frac{C}{T_s} V_i \end{aligned} \quad 8-66$$

et par conséquent

$$R_T = \frac{v_i(t)}{i_0(t)} = \frac{V_i}{I_0} = \frac{T_s}{C} \quad 8-67$$

- Montage à transrésistance négative

Dans ce cas, on peut écrire pour  $I_0$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{T_s} \int_{\frac{T}{2}}^T i_0(t) dt = -\frac{q_0(T_s) - q_0(T_s/2)}{T_s} = -C \frac{-v_C(T_s) - (-v_C(T_s/2))}{T_s} \\ &= -C \frac{0 + v_C(T_s/2)}{T_s} = -\frac{C}{T_s} V_i \end{aligned} \quad 8-68$$

et par conséquent

$$R_T = \frac{v_i(t)}{i_0(t)} = \frac{V_i}{I_0} = -\frac{T_S}{C} \quad 8-69$$

Bien entendu ces résultats sont valables pour des fréquences du signal d'entrée beaucoup plus petites que la fréquence d'horloge  $F_S$  (fréquence d'échantillonnage).

#### 8.4.2.8 Nouvelle structure des amplificateurs de tension à capacités commutées

En utilisant les deux montages à transrésistance dans la structure de l'amplificateur inverseur, il est possible de réaliser les amplificateurs de tension à capacités commutées inverseur et non inverseur, ceci sans influence des capacités parasites.

En tenant compte de tout ce qui a été dit avant, il est possible de construire deux amplificateurs à capacités commutées, l'un inverseur, l'autre non.

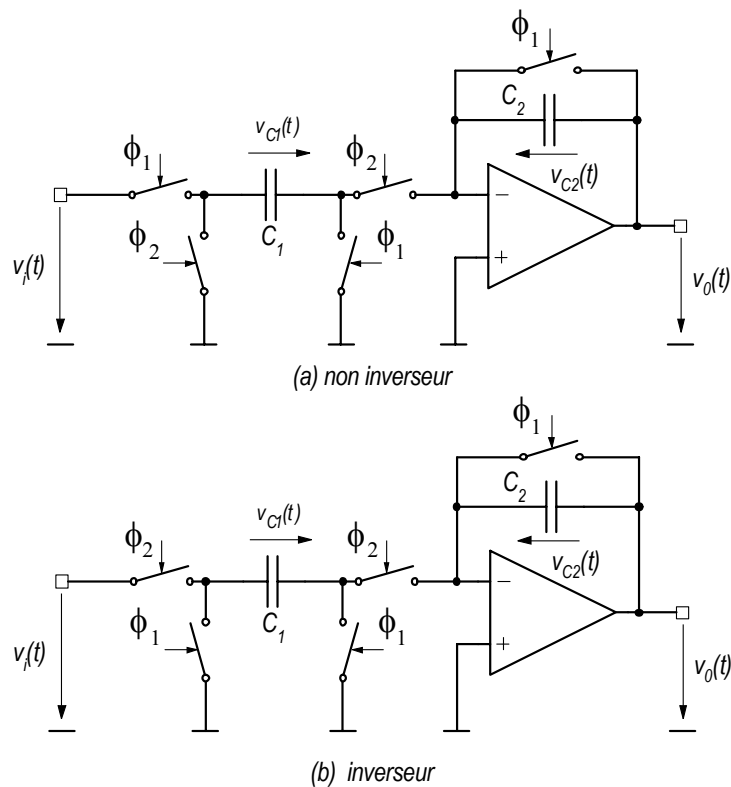


Figure 8-27 : Amplificateurs à capacités commutées

#### 8.4.2.9 Fonctions de transfert résultantes

##### 8.4.2.9.1 Amplificateur non inverseur

##### 8.4.2.9.1.1 Phase $\phi_1$ active : $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Pour cette phase, on peut écrire pour les tensions aux bornes de chaque capacité :

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-70$$

et

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0 \quad 8-71$$

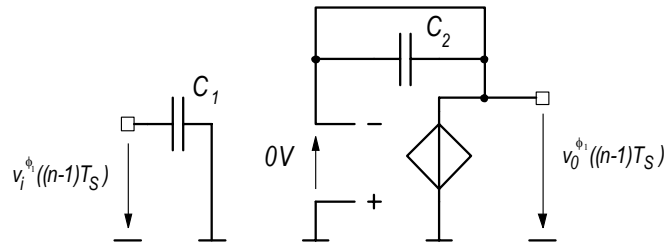


Figure 8-28 : Amplificateurs à capacités commutées non inverseur : Phase  $\phi_1$  active

#### 8.4.2.9.1.2 Phase $\phi_2$ active : $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

La capacité  $C_1$  se trouve sur l'entrée de l'amplificateur.

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités valent :

$$\begin{aligned} v_{C_1}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) &= -v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \\ v_{C_2}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) &= 0 \end{aligned} \quad 8-72$$

En utilisant le principe de superposition

$$0 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-73$$

Il faut se souvenir que la variation de la tension d'entrée est négligeable durant une demi-période ( $T_S/2$ ) et par conséquent :

$$v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \quad 8-74$$

On a donc finalement

$$C_2 v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = C_1 v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \quad 8-75$$

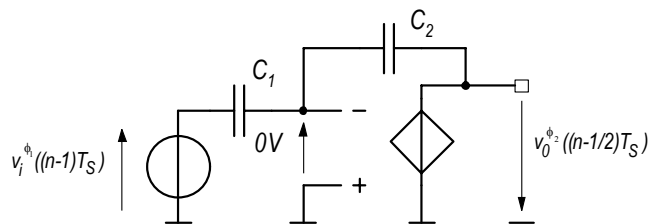


Figure 8-29 : Amplificateurs à capacités commutées non inverseur : Phase  $\phi_2$  active

#### 8.4.2.9.1.3 Fonction de transfert en $H^{\phi_2\phi_2}$

De la relation 8-75, on en déduit la fonction de transfert  $H^{\phi_2\phi_2}$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = \frac{C_1}{C_2} z^{-1} \quad 8-76$$

Au signe près, cette fonction de transfert est identique celle du circuit de la Figure 8-22.



8.4.2.9.2 *Amplificateur inverseur*8.4.2.9.2.1 *Phase  $\phi_1$  active :  $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$* 

Pour cette phase, on peut écrire pour les tensions aux bornes de chaque capacité :

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0 \quad 8-77$$

et

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0 \quad 8-78$$

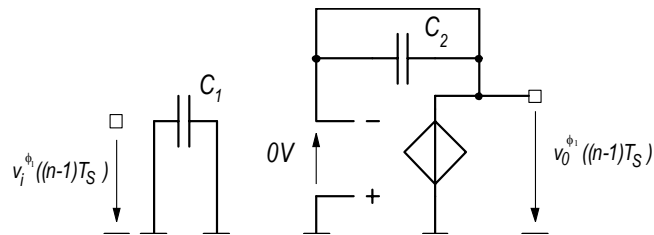


Figure 8-30 : Amplificateurs à capacités commutées inverseur : Phase  $\phi_1$  active

8.4.2.9.2.2 *Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$* 

La capacité  $C_1$  se trouve en série entre la source de tension d'entrée et l'entrée (-) de l'amplificateur.

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités sont nulles. Par conséquent, toujours en appliquant le principe de superposition

$$0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-79$$

Et finalement

$$v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = -\frac{C_1}{C_2} v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-80$$

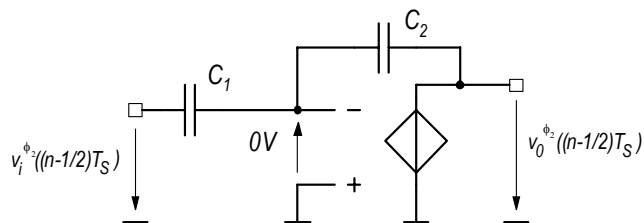


Figure 8-31 : Amplificateurs à capacités commutées inverseur : Phase  $\phi_2$  active

8.4.2.9.2.3 *Fonction de transfert en  $H^{\phi_2\phi_2}$* 

De la relation 8-80, on en déduit la fonction de transfert  $H^{\phi_2\phi_2}$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \quad 8-81$$

On voit ici que la phase reste constante. Il n'y a donc pas de retard entre l'entrée et la sortie.

#### 8.4.2.10 Effet de l'injection de charge par les commutateurs en technologie CMOS.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les effets des capacités parasites placées entre la commande du commutateur (*Gate*) et les ports d'entrée et de sortie (*Source* et *Drain*). Pour simplifier cette analyse, nous admettons que les capacités parasites sont toutes identiques. Il en est de même pour les tensions de seuil (*Threshold voltage*  $V_{TH}$ ) des transistors MOSFET. Dans la suite de l'étude, on fait les hypothèses suivantes :

- les MOSFET commutent instantanément lorsque la tension sur la commande (*Gate*) est égale à la tension la plus élevée sur des bornes d'entrée ou de sortie,
- les capacités *Source – substrat* et *Drain – substrat* sont ignorées (*bulk effect*).

La Figure 8-32 illustre le cas d'un amplificateur à capacités commutées non inverseur. Les condensateurs  $C_S$  correspondent aux capacités de couplage GD et GS des MOSFET.

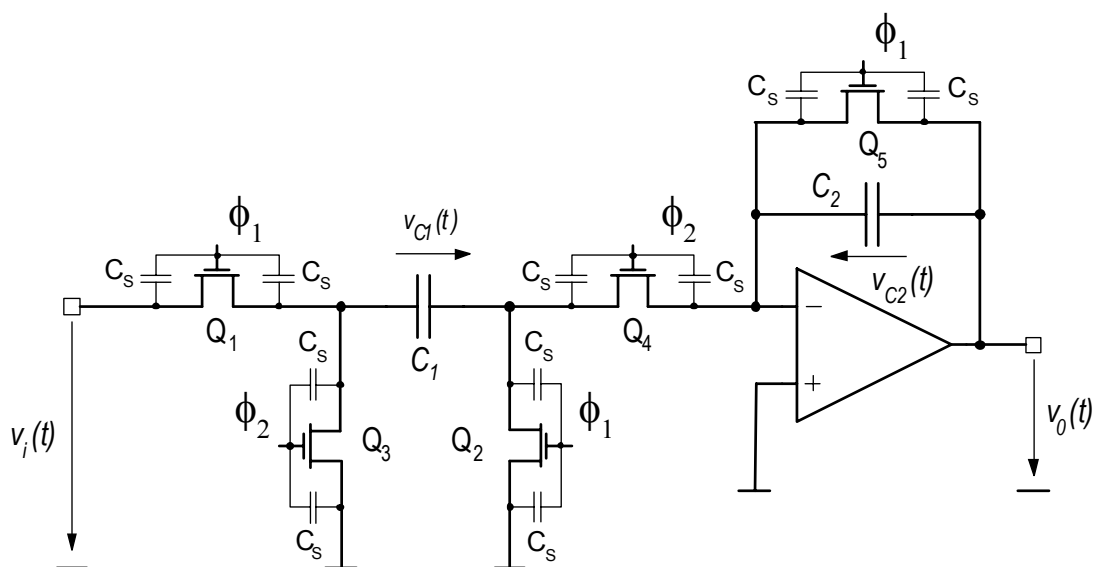


Figure 8-32 : Amplificateurs à capacités commutées non-inverseur avec capacités de couplage GD et DS

Considérons une séquence des horloges  $\phi_1$  et  $\phi_2$  correspondant à

- $\phi_1 \downarrow$  : transition négative (ouverture des commutateurs commandés par  $\phi_1$ )
- $\phi_2 \uparrow$  : transition positive (fermeture des commutateurs commandés par  $\phi_2$ )
- $\phi_2 \downarrow$  : transition négative (ouverture des commutateurs commandés par  $\phi_2$ )

Une première injection de charge apparaît lors de la transition négative de  $\phi_1$ .

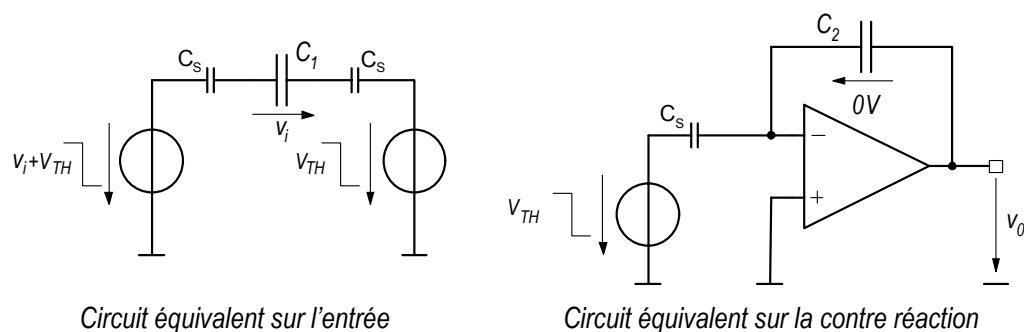


Figure 8-33 : Circuits équivalents lors d'une transition négative de  $\phi_1 \downarrow$

Avant l'ouverture du commutateur d'entrée ( $Q_1$ ) commandé par l'horloge  $\phi_1$ , la tension d'entrée, positive est de  $v_i$ . Lors de l'ouverture de  $Q_1$  et de  $Q_2$ , les transitions négatives de tensions sur la borne de gauche de  $C_1$  est de  $-(v_i+V_{TH})$  et de  $-V_{TH}$  sur la borne de droite. Pour le commutateur  $Q_5$ , une injection de charge a lieu sur la borne du condensateur  $C_2$  reliée à l'entrée de l'amplificateur. La borne du condensateur reliée à la sortie de l'amplificateur ne varie pas puisqu'elle est directement reliée à une source de tension. Des deux circuits équivalents de la Figure 8-33, on peut écrire pour les tensions juste après la transition négative de  $\phi_1$  :

$$v_{C1}(\phi_{1\downarrow+}) = v_i - \frac{C_s}{2C_1} v_i \quad 8-82$$

et

$$v_{C2}(\phi_{1\downarrow+}) = \frac{C_s}{C_2} V_{TH} \quad 8-83$$

Idéalement  $v_{C1}(\phi_{1\downarrow+})$  devrait être égal à  $v_i$  et  $v_{C2}(\phi_{1\downarrow+})$  à 0V. On voit donc qu'il y a une dépendance de la tension d'entrée sur  $C_1$  et un offset de tension sur  $C_2$ .

La transition positive de l'horloge  $\phi_2$  provoque la fermeture des commutateurs  $Q_3$  et  $Q_5$ . La Figure 8-34 donne les circuits équivalents de l'entrée et de la sortie.

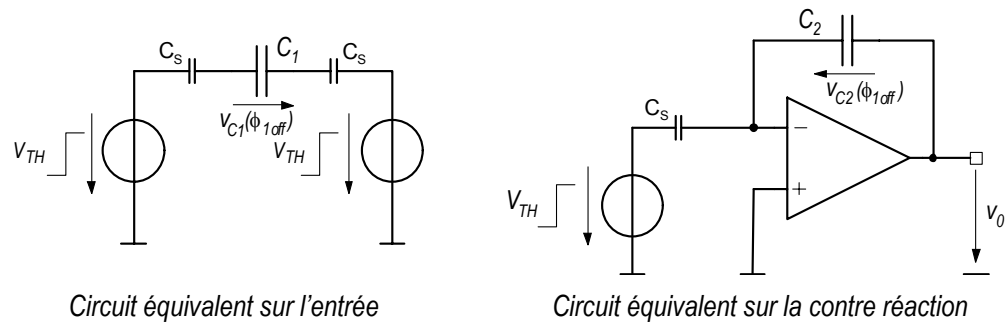


Figure 8-34 : Circuits équivalents lors d'une transition positive de  $\phi_2 \uparrow$

Pour l'entrée, on peut écrire la relation suivante

$$v_{C1}(\phi_{2\uparrow+}) = v_{C1}(\phi_{1\downarrow+}) \quad 8-84$$

et pour la sortie

$$v_{C2}(\phi_{2\uparrow+}) = v_{C2}(\phi_{1\downarrow+}) - \frac{C_s}{C_2} V_{TH} \quad 8-85$$

Après fermeture de  $Q_3$  et  $Q_4$ , il y a transfert de la charge de  $C_1$  dans  $C_2$ .

$$v_{C1}(\phi_2) = 0V \quad 8-86$$

$$v_{C2}(\phi_2) = \frac{C_1}{C_2} v_{C1}(\phi_{2\uparrow+}) + v_{C2}(\phi_{2\uparrow+}) = \frac{C_1}{C_2} v_{C1}(\phi_{1\downarrow-}) + v_{C2}(\phi_{2\uparrow+}) \quad 8-87$$

La transition négative de l'horloge  $\phi_2$  provoque l'ouverture des commutateurs  $Q_3$  et  $Q_5$ . La Figure 8-35 donne les circuits équivalents de l'entrée et de la sortie.

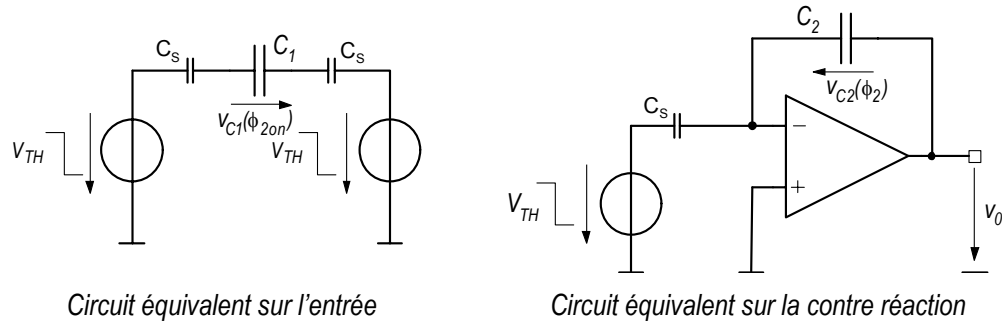


Figure 8-35 : Circuits équivalents lors d'une transition positive de  $\phi_2$

Pour cette dernière transition, les tensions aux bornes des condensateurs prennent les valeurs suivantes

$$v_{C1}(\phi_{2\downarrow+}) = v_{C1}(\phi_2) \quad 8-88$$

$$v_{C2}(\phi_{2\downarrow+}) = v_{C2}(\phi_2) + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} \quad 8-89$$

La tension aux bornes du condensateur  $C_1$  ne présente pas d'intérêt, raison pour laquelle on se limitera à l'observation de la tension aux bornes de  $C_2$  soit la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel.

$$\begin{aligned} v_0(\phi_{2\downarrow+}) &= v_{C2}(\phi_{2\downarrow+}) = v_{C2}(\phi_2) + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} = \frac{C_1}{C_2} v_{C1}(\phi_{1\downarrow-}) + v_{C2}(\phi_{2\uparrow+}) + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} \\ &= \frac{C_1}{C_2} \left( 1 - \frac{C_S}{2C_1} \right) v_i + v_{C2}(\phi_{1\downarrow+}) - \frac{C_S}{C_2} V_{TH} + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} \\ &= \frac{C_1}{C_2} \left( 1 - \frac{C_S}{2C_1} \right) v_i + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} \end{aligned} \quad 8-90$$

Cette dernière relation, écrite sous une autre forme montre l'influence des capacités parasites des commutateurs

$$v_0(\phi_{2\downarrow+}) = \frac{C_1}{C_2} v_i - \frac{C_S}{2C_2} v_i + \frac{C_S}{C_2} V_{TH} \quad 8-91$$

Les capacités parasites introduisent un offset et un terme dépendant de la tension d'entrée. On a donc une erreur de gain et une erreur d'offset.

#### 8.4.2.11 Effet de la limitation du gain de l'amplificateur

Le but de ce paragraphe est de voir les effets de la limitation du gain de l'amplificateur opérationnel sur la fonction de transfert, puis de comparer les résultats avec ceux obtenus pour les amplificateurs classiques à résistances. Pour des raisons évidentes de simplification, il n'est pas tenu compte de la limitation fréquentielle de l'amplificateur (passe-bas).

8.4.2.11.1 Amplificateur non inverseur

8.4.2.11.1.1 Phase  $\phi_1$  active :  $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Pour cette phase, se reporter aux relations 8-70 et 8-71.

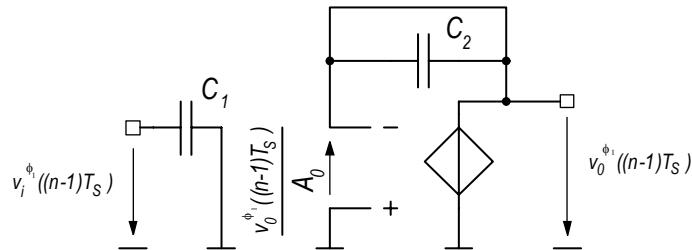


Figure 8-36 : Amplificateurs à capacités commutées non inverseur : Phase  $\phi_1$  active

8.4.2.11.1.2 Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

La capacité  $C_1$  se trouve sur l'entrée de l'amplificateur.

Les conditions initiales sont identiques à celles définies par la relation 8-72.

En utilisant le principe de conservation de la charge

$$Q_{C1} = C_1 \left( v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) - \frac{v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \tag{8-92}$$

$$Q_{C2} = C_2 \left( v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S) + \frac{v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \tag{8-93}$$

Sachant que  $Q_{C1}=Q_{C2}$

$$C_2 \left( 1 + \frac{C_1 + C_2}{C_2 A_0} \right) v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = C_1 v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \tag{8-94}$$

Puis selon l'hypothèse sur la plage de fréquence du signal d'entrée

$$v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \tag{8-95}$$

On a donc finalement

$$v_o^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = \frac{C_1}{C_2} \frac{A_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}}{1 + A_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}} v_i^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \tag{8-96}$$

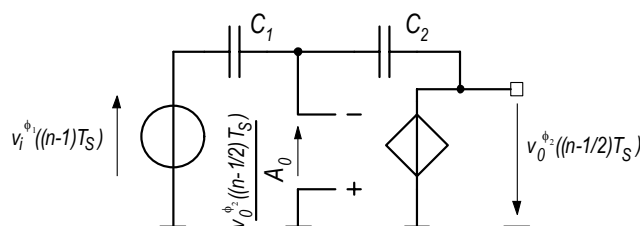


Figure 8-37 : Amplificateurs à capacités commutées non inverseur : Phase  $\phi_2$  active

8.4.2.11.1.3 Fonction de transfert en  $H^{\phi_2\phi_2}$ 

De la relation 8-96, on en déduit la fonction de transfert  $H^{\phi_2\phi_2}$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = \frac{A_0(z) \frac{C_2}{C_1 + C_2}}{1 + A_0(z) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} \frac{C_1}{C_2} z^{-1} = G_{ACL}(z) \frac{C_1}{C_2} z^{-1} \quad 8-97$$

Lorsque le gain en tension de l'amplificateur opérationnel tend vers l'infini, on retrouve la relation 8-76

## 8.4.2.11.2 Amplificateur inverseur

8.4.2.11.2.1 Phase  $\phi_1$  active :  $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$ 

Pour cette phase, se reporter aux relations 8-77 et 8-78

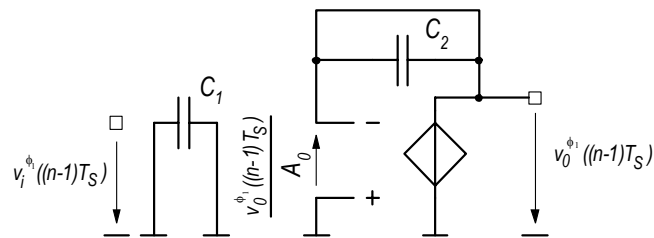


Figure 8-38 : Amplificateurs à capacités commutées inverseur : Phase  $\phi_1$  active

8.4.2.11.2.2 Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$ 

La capacité  $C_1$  se trouve en série entre la source de tension d'entrée et l'entrée (-) de l'amplificateur. En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités sont nulles. En utilisant le principe de conservation de la charge, on a

$$Q_{C1} = -C_1 \left( v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) + \frac{v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \quad 8-98$$

$$Q_{C2} = C_2 \left( v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) + \frac{v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \quad 8-99$$

Sachant que  $Q_{C1}=Q_{C2}$

$$C_2 \left( 1 + \frac{C_1 + C_2}{C_2 A_0} \right) v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = -C_1 v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-100$$

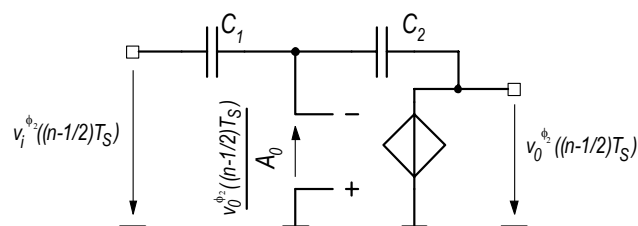


Figure 8-39 : Amplificateurs à capacités commutées inverseur : Phase  $\phi_2$  active

8.4.2.11.2.3 Fonction de transfert en  $H^{\phi_2\phi_2}$

De la relation 8-100, on en déduit la fonction de transfert  $H^{\phi_2\phi_2}$

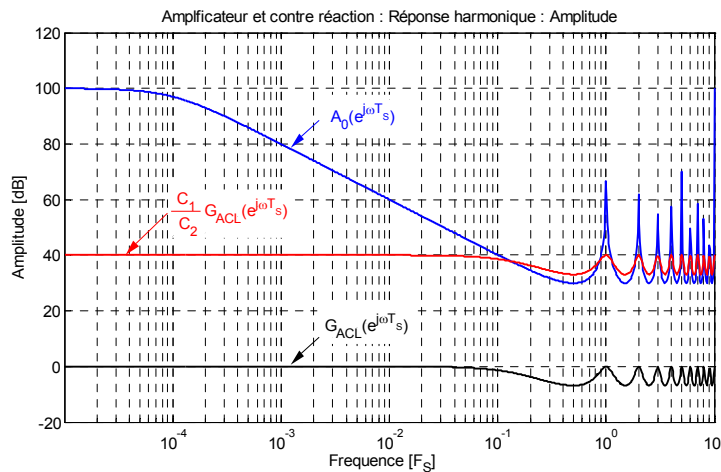
$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = -\frac{A_0(z) \frac{C_2}{C_1 + C_2}}{1 + A_0(z) \frac{C_2}{C_1 + C_2}} \frac{C_1}{C_2} = -G_{ACL}(z) \frac{C_1}{C_2} \tag{8-101}$$

Lorsque le gain en tension de l'amplificateur opérationnel tend vers l'infini, on retrouve la relation 8-81

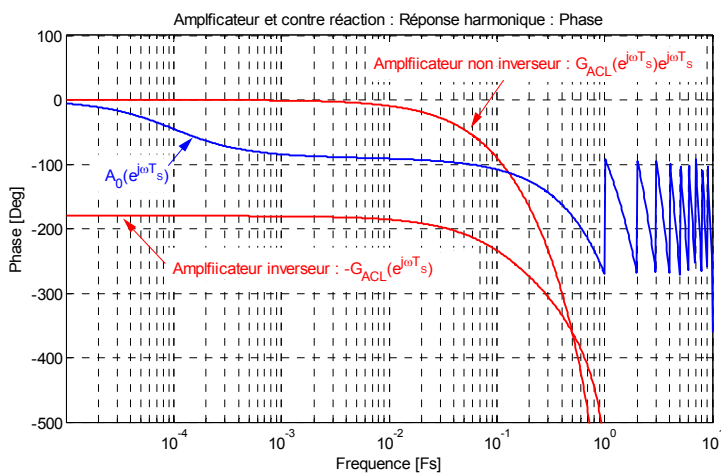
8.4.2.12 Réponses harmoniques des amplificateurs à capacités commutées

En gardant en mémoire la restriction faite sur le signal d'entrée, c'est à dire que ce dernier peut être considéré comme constant sur une période d'échantillonnage, on peut admettre que la réponse harmonique en amplitude est identique à celle d'un amplificateur à résistance. Par contre pour l'amplificateur à capacités commutées non inverseur, la phase varie linéairement avec la fréquence selon la relation

$$Arg(H^{\phi_2\phi_2}(z)) = -\omega T_s \tag{8-102}$$



(a) Amplitude



(b) Phase

Figure 8-40 : Réponse harmonique pour le montage non inverseur

Pour des fréquences du signal d'entrée proche de la fréquence d'échantillonnage, les relations précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas une simulation numérique est nécessaire vu la complexité du modèle.



### 8.5 INTÉGRATEUR À CAPACITÉS COMMUTÉES

Le bloc intégrateur à capacités commutées est un élément clef pour le traitement du signal analogique. Tous les filtres peuvent être réduits en intégrateurs inverseurs ou non inverseurs.

#### 8.5.1 Intégrateur sans commutation

##### 8.5.1.1 Etude dans le domaine continu

La Figure 8-41 illustre les montages non inverseur et inverseur de l'intégrateur. L'intégrateur non inverseur peut être construit avec un seul amplificateur mais dans ce cas, la constante de temps d'intégration doit être réalisée avec deux condensateurs et deux résistances. La qualité de ce type de montage est directement liée à la précision relative des composants qui doivent être appairée.

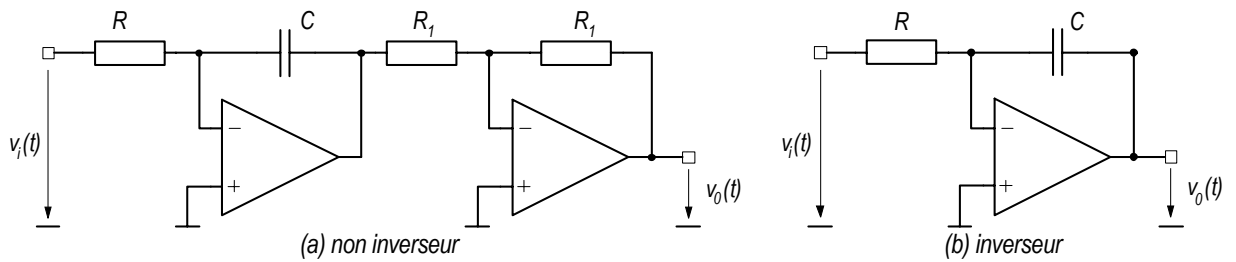


Figure 8-41 : Montage intégrateurs

##### 8.5.1.1.1 Intégrateur avec amplificateur opérationnel idéal

L'intégrateur sous sa forme la plus simple est de type inverseur. Il est constitué d'un amplificateur opérationnel, d'une résistance et d'un condensateur.

La fonction de transfert idéale de ce montage prend la forme suivante :

$$G_I(s) = \frac{V_i(s)}{V_o(s)} = -\frac{1}{sRC} = -\frac{1}{s\tau_i}$$

8-103

$\tau_i$  est défini comme la constante de temps d'intégration.

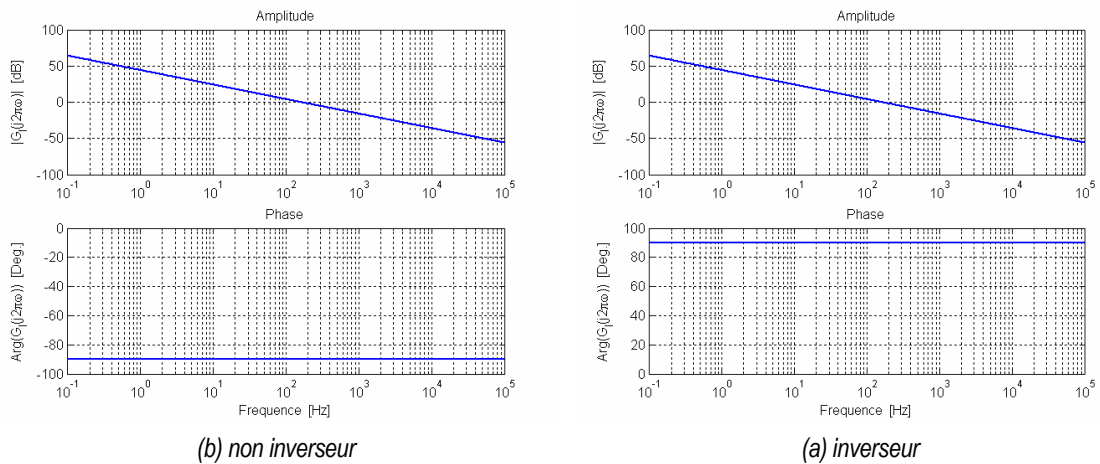


Figure 8-42 : Réponse harmonique du montage intégrateur

L'intégrateur non inverseur présente une réponse harmonique en amplitude identique à l'intégrateur inverseur alors que la réponse en phase présente une différence de 180°.

8.5.1.1.2 Intégrateur inverseur avec amplificateur opérationnel non idéal

En tenant compte du gain statique et de la bande passante de l'amplificateur opérationnel

$$A_0(s) = \frac{A_0 \omega_c}{s + \omega_c} = 2\pi \frac{GBW}{s + \omega_c} \tag{8-104}$$

on peut déduire de la Figure 8-43

$$G_I(s) = \frac{V_i(s)}{V_0(s)} = -\frac{1}{sRC} \frac{A_0(s) \frac{sRC}{1+sRC}}{1 + A_0(s) \frac{sRC}{1+sRC}} = -\frac{1}{sRC} G_{ACL}(s) \tag{8-105}$$

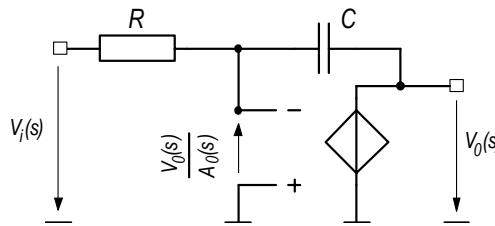


Figure 8-43 :Intégrateur inverseur avec amplificateur opérationnel non idéal

La réponse harmonique  $G_I(j\omega)$  de cet intégrateur montre que à :

1. Basses fréquences :  $\lim_{s \rightarrow 0} G_I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( -\frac{A_0(s) \frac{1}{1+sRC}}{1 + A_0(s) \frac{sRC}{1+sRC}} \right) \Big|_{\lim_{s \rightarrow 0} (A_0(s)) = A_0} = -A_0$
2. Moyennes fréquences :  $G_{ACL}(s) \cong 1 \Rightarrow G_I(s) \cong -\frac{1}{sRC}$
3. Fréquences élevées :  $G_{ACL}(s) \cong \frac{A_0 \omega_c}{s} \Rightarrow G_I(s) \cong -\frac{1}{sRC} \frac{2\pi GBW}{s}$

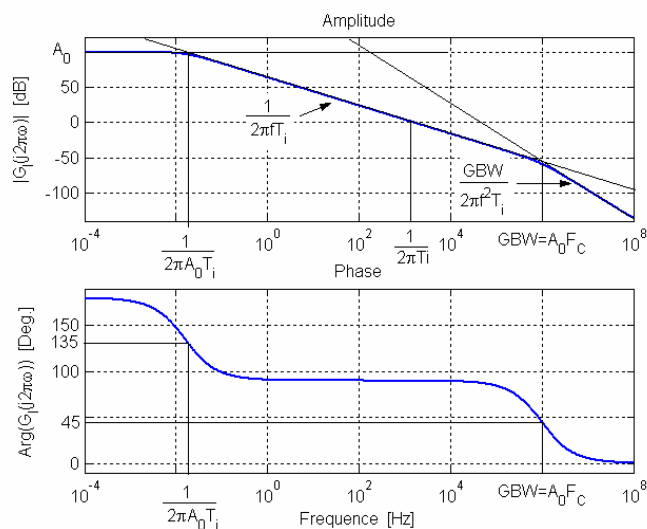


Figure 8-44 :Réponse harmonique de l'intégrateur inverseur non idéal

L'intégrateur non inverseur présente la même réponse harmonique en amplitude. La phase se trouve quant à elle décalée de  $-180^\circ$ .

## 8.5.2 Intégrateur à capacités commutées

### 8.5.2.1 Etude dans le domaine échantillonné

La Figure 8-45 montre les topologies des intégrateurs à capacités commutées non inverseur et inverseur.

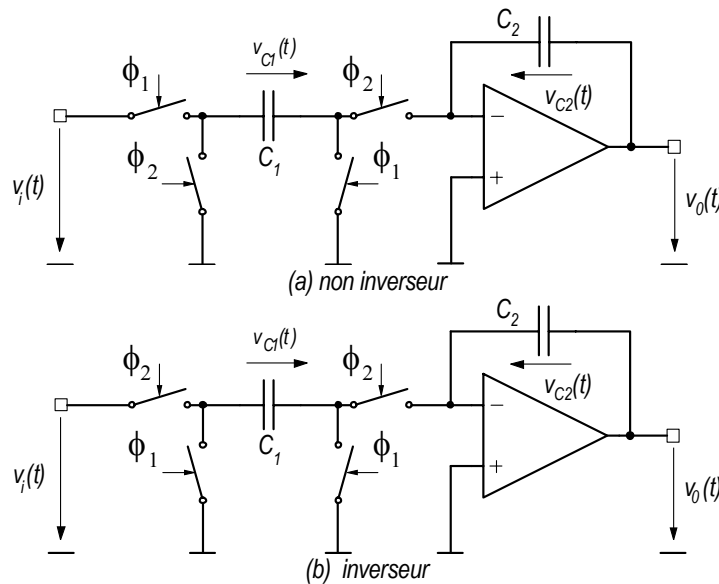


Figure 8-45 :Intégrateurs à capacités commutées

### 8.5.2.2 Intégrateur à capacités commutées avec amplificateur opérationnel idéal

Dans le cas de circuits à capacités commutées, le passage de l'intégrateur inverseur à l'intégrateur non inverseur se fait en croisant les commandes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur les deux commutateurs situés sur l'entrée. Le but des paragraphes suivants est de mettre en évidence la réponse harmonique de deux types d'intégrateurs

#### 8.5.2.2.1 Intégrateur non inverseur

##### 8.5.2.2.1.1 Phase $\phi_1$ active : $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Les tensions aux bornes des condensateurs sont définies par les sources de tensions

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-106$$

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-107$$

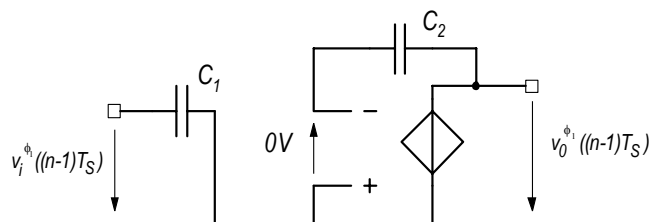


Figure 8-46 :Schéma équivalent de l'intégrateur non-inverseur idéal : Phase  $\phi_1$  active

8.5.2.2.1.2 Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$ 

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités valent :

$$\begin{aligned} v_{C1}((n-1/2)T_S) &= -v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \\ v_{C2}((n-1/2)T_S) &= v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \end{aligned} \quad 8-108$$

En utilisant le principe de superposition

$$0 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_1}((n-1)T_S)) \quad 8-109$$

La tension de sortie ne va pas changer durant la phase suivante, on a donc :

$$v_0^{\phi_1}(nT_S) = v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-110$$

Des deux relations précédentes, on obtient la relation

$$v_0^{\phi_1}(nT_S) = \frac{C_1}{C_2} v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) + v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-111$$

Puis en utilisant la transformée en z

$$v_0^{\phi_1}(z) = \frac{C_1}{C_2} z^{-1} v_i^{\phi_1}(z) + z^{-1} v_0^{\phi_1}(z) \quad 8-112$$

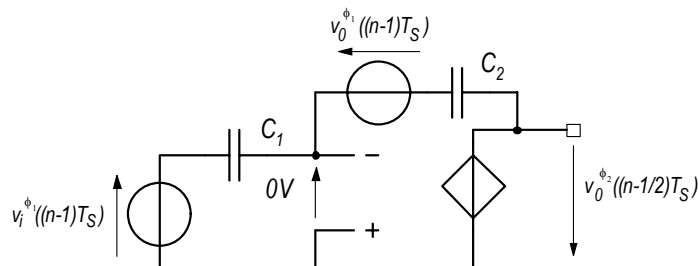


Figure 8-47 :Schéma équivalent de l'intégrateur non-inverseur idéal : Phase  $\phi_2$  active

Finalement on obtient la fonction de transfert correspondant à la phase  $\phi_1$

$$H^{\phi_1\phi_1}(z) = \frac{v_0^{\phi_1}(z)}{v_i^{\phi_1}(z)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z - 1} \quad 8-113$$

La réponse harmonique est issue de la fonction de transfert en z  $H^{\phi_1\phi_1}(z)$ , en remplaçant z par  $e^{j\omega T_S}$ .

$$H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_S}) = \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{e^{j\omega T_S} - 1} = \frac{C_1}{C_2} \frac{e^{-j\omega \frac{T_S}{2}}}{e^{j\omega \frac{T_S}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_S}{2}}} \quad 8-114$$

Sachant que  $\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$ , on a la forme définitive suivante :

$$H^{\phi_1 \phi_1}(e^{j\omega T_S}) = \frac{C_1}{C_2} \frac{e^{-j\omega \frac{T_S}{2}}}{j2 \sin\left(\omega \frac{T_S}{2}\right)} = \frac{C_1}{j\omega T_S C_2} \frac{\omega \frac{T_S}{2}}{\sin\left(\omega \frac{T_S}{2}\right)} e^{-j\omega \frac{T_S}{2}} \quad 8-115$$

La réponse harmonique en amplitude et en phase est tracée à la Figure 8-50

### 8.5.2.2.2 Intégrateur inverseur

#### 8.5.2.2.2.1 Phase $\phi_1$ active : $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Les tensions aux bornes des condensateurs sont définies par les sources de tensions

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0 \quad 8-116$$

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \quad 8-117$$

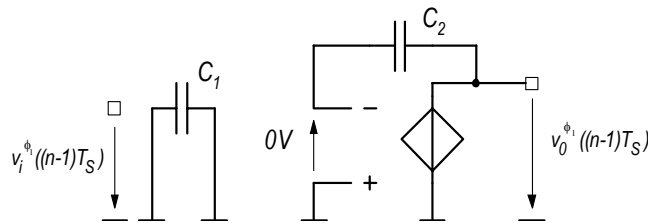


Figure 8-48 : Schéma équivalent de l'intégrateur inverseur idéal : Phase  $\phi_1$  active

#### 8.5.2.2.2.2 Phase $\phi_2$ active : $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités valent :

$$\begin{aligned} v_{C_1}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) &= 0 \\ v_{C_2}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) &= v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \end{aligned} \quad 8-118$$

En utilisant le principe de superposition

$$0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_1}((n-1)T_S)) \quad 8-119$$

La tension de sortie ne change pas durant la phase  $\phi_1$ . On peut donc écrire

$$v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \quad 8-120$$

Des deux relations précédentes, on obtient la relation

$$v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_1}((n-3/2)T_S) = -\frac{C_1}{C_2} v_i^{\phi_1}((n-1/2)T_S) \quad 8-121$$

Puis en utilisant la transformée en z

$$v_0^{\phi_2}(z)(1 - z^{-1}) = -\frac{C_1}{C_2} v_i^{\phi_2}(z) \quad 8-122$$

Finalement on obtient la fonction de transfert correspondant à la phase  $\phi_2$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z-1} \quad 8-123$$

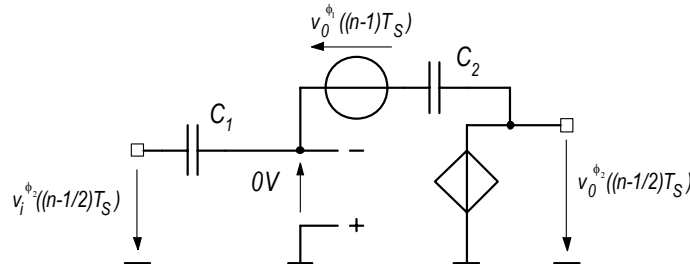


Figure 8-49 : Schéma équivalent de l'intégrateur inverseur idéal : Phase  $\phi_2$  active

La réponse harmonique est issue de la fonction de transfert en  $z$   $H^{\phi_2\phi_2}(z)$ , en remplaçant  $z$  par  $e^{j\omega T_s}$ ,

$$H^{\phi_2\phi_2}(e^{j\omega T_s}) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{e^{j\omega T_s}}{e^{j\omega T_s} - 1} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{e^{j\omega \frac{T_s}{2}}}{e^{j\omega \frac{T_s}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}} \quad 8-124$$

Sachant que  $\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$ , on a la forme définitive suivante :

$$H^{\phi_2\phi_2}(e^{j\omega T_s}) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{e^{j\omega \frac{T_s}{2}}}{j2 \sin\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)} = -\frac{C_1}{j\omega T_s C_2} \frac{\omega \frac{T_s}{2}}{\sin\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)} e^{j\omega \frac{T_s}{2}} \quad 8-125$$

### 8.5.2.2.3 Réponse harmonique pour l'intégrateur à capacités commutées idéal

En rapportant la pulsation  $\omega$  à la pulsation d'échantillonnage  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ , les relations 8-115 et 8-125 de viennent

- Intégrateur non inverseur

$$H^{\phi_2\phi_2}(e^{j\omega T_s}) = j \underbrace{\frac{C_1}{2\pi \frac{\omega}{\omega_s} C_2}}_{H_i(\omega)} \frac{\pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)} e^{j\pi \frac{\omega}{\omega_s}} \quad 8-126$$

- Intégrateur inverseur

$$H^{\phi_1\phi_1}(e^{j\omega T_s}) = -j \underbrace{\frac{C_1}{2\pi \frac{\omega}{\omega_s} C_2}}_{H_m(\omega)} \frac{\pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_s}} \quad 8-127$$

On voit que les modules de ces deux fonctions de transfert sont identiques, seules les phases diffèrent.

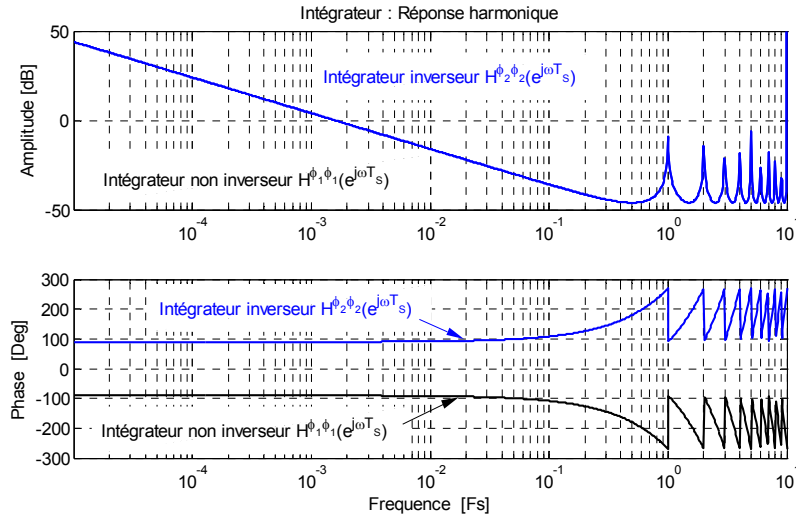


Figure 8-50 :Réponse harmonique de l'intégrateur idéal

8.5.2.3 Intégrateur à capacités commutées avec amplificateur opérationnel non idéal

Les résultats obtenus aux § 8.4.2.12 et 8.5.1.1 laissent à penser que la réponse harmonique de l'intégrateur à capacités commutées en tenant compte de la réponse harmonique non idéale de l'amplificateur est identique à celle du montage continu classique pour les basses fréquences. Les paragraphes suivants tentent de la démontrer.

8.5.2.3.1 Intégrateur non inverseur

8.5.2.3.1.1 Phase  $\phi_1$  active :  $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Les tensions aux bornes des condensateurs sont définies par les sources de tensions

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) \tag{8-128}$$

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) \tag{8-129}$$

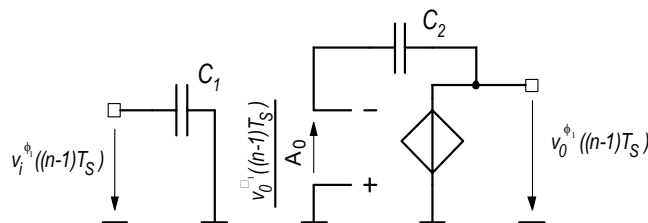


Figure 8-51 :Schéma équivalent de l'intégrateur non-inverseur : Phase  $\phi_1$  active

8.5.2.3.1.2 Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités valent :

$$v_{C_1}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) = -v_i^{\phi_1}((n-1)T_S)$$

$$v_{C_2}^{\phi_1}((n-1/2)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) \tag{8-130}$$

En utilisant le principe de la conservation de la charge

$$Q_{C1} = C_1 \left( v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) - \frac{v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \quad 8-131$$

$$Q_{C2} = C_2 \left( v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \right) \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) \quad 8-132$$

La tension de sortie ne va pas changer durant la phase suivante, on a donc :

$$v_0^{\phi_1}(nT_S) = v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) \quad 8-133$$

Des trois relations précédentes, on obtient la relation

$$\begin{aligned} v_i^{\phi_1}((n-1)T_S) &= \frac{C_2}{C_1} \left( v_0^{\phi_1}(nT_S) - v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \right) \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) + \frac{v_0^{\phi_1}(nT_S)}{A_0} \\ &= \frac{C_2}{C_1} \left( \left( 1 + \frac{1}{A_0} \frac{C_1 + C_2}{C_2} \right) v_0^{\phi_1}(nT_S) - \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \right) \end{aligned} \quad 8-134$$

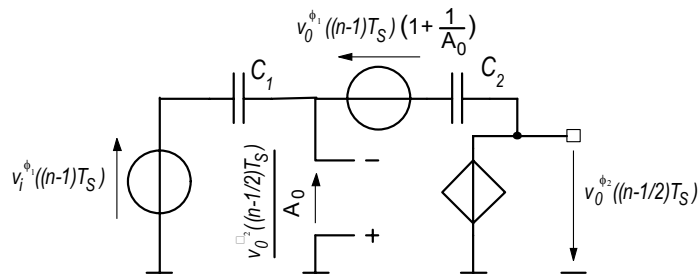


Figure 8-52 : Schéma équivalent de l'intégrateur non-inverseur : Phase  $\phi_2$  active

Puis en utilisant la transformée en z

$$v_i^{\phi_1}(z)z^{-1} = \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{\frac{C_2}{C_1 + C_2} A_0(z) + 1}{\frac{C_2}{C_1 + C_2} A_0(z)} - \left( \frac{A_0(z) + 1}{A_0(z)} \right) z^{-1} \right) v_0^{\phi_1}(z) \quad 8-135$$

Finalement on obtient la fonction de transfert correspondant à la phase  $\phi_1$

$$H^{\phi_1\phi_1}(z) = \frac{v_0^{\phi_1}(z)}{v_i^{\phi_1}(z)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A_0(z)} \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z-1} \right)} \quad 8-136$$

### 8.5.2.3.2 Intégrateur inverseur

#### 8.5.2.3.2.1 Phase $\phi_1$ active : $(n-1)T_S < t < (n-1/2)T_S$

Les tensions aux bornes des condensateurs sont définies par les sources de tensions

$$v_{C1}^{\phi_1}((n-1)T_S) = 0 \quad 8-137$$

$$v_{C2}^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \left( 1 + \frac{1}{A_0} \right) \quad 8-138$$



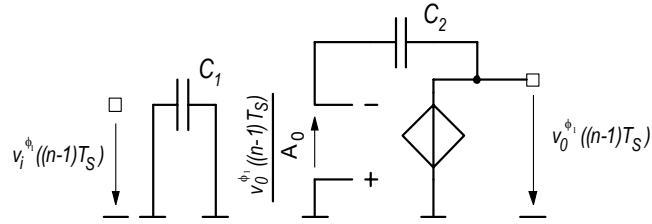


Figure 8-53 :Schéma équivalent de l'intégrateur inverseur : Phase  $\phi_1$  active

8.5.2.3.2.2 Phase  $\phi_2$  active :  $(n-1/2)T_S < t < nT_S$

En  $t=(n-1/2)T_S$ , les conditions initiales sur les tensions aux bornes des capacités valent :

$$v_{C1}((n-1/2)T_S) = 0$$

$$v_{C2}((n-1/2)T_S) = v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) \tag{8-139}$$

En utilisant le principe de la conservation de la charge

$$Q_{C1} = C_1 \left( -v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - \frac{v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \right) \tag{8-140}$$

$$Q_{C2} = C_2 \left( v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) \right) \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) \tag{8-141}$$

La tension de sortie ne change pas durant la phase  $\phi_1$ . On peut donc écrire

$$v_0^{\phi_1}((n-1)T_S) = v_0^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \tag{8-142}$$

Des trois relations précédentes, on obtient la relation

$$-v_i^{\phi_2}((n-1/2)T_S) = \frac{C_2}{C_1} \left( v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - v_0^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \right) \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) + \frac{v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S)}{A_0} \tag{8-143}$$

$$= \frac{C_2}{C_1} \left( \left(1 + \frac{1}{A_0} \frac{C_1 + C_2}{C_2}\right) v_0^{\phi_2}((n-1/2)T_S) - \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) v_0^{\phi_2}((n-3/2)T_S) \right)$$

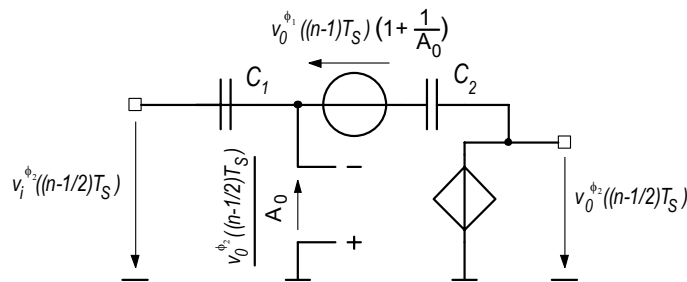


Figure 8-54 :Schéma équivalent de l'intégrateur inverseur : Phase  $\phi_2$  active

Puis en utilisant la transformée en z

$$v_i^{\phi_2}(z) = -\frac{C_2}{C_1} \left( \frac{\frac{C_2}{C_1 + C_2} A_0(z) + 1}{\frac{C_2}{C_1 + C_2} A_0(z)} - \left( \frac{A_0(z) + 1}{A_0(z)} \right) z^{-1} \right) v_0^{\phi_2}(z) \quad 8-144$$

Finalement on obtient la fonction de transfert correspondant à la phase  $\phi_2$

$$H^{\phi_2\phi_2}(z) = \frac{v_0^{\phi_2}(z)}{v_i^{\phi_2}(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A_0(z)} \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z-1} \right)} \quad 8-145$$

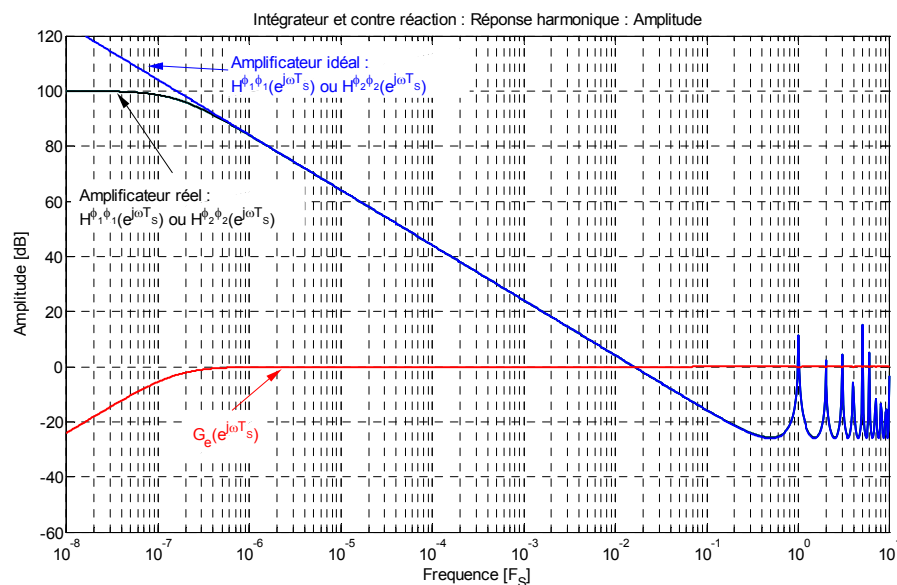
### 8.5.2.3.3 Réponse harmonique des intégrateurs à capacités commutées non idéal

En comparant les relations 8-113 et 8-136 ainsi que 8-123 et 8-145 on voit que entre les intégrateurs avec des amplificateurs idéaux et les intégrateurs avec amplificateurs réels, on peut extraire un terme identique pour les deux types d'intégrateurs, soit

$$G_e(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{A_0(z)} \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z-1} \right)} \quad 8-146$$

Pour des basses fréquences  $G_e(e^{j\omega T_s})$  est proche de 1, le comportement des intégrateurs non idéaux se rapprochent des cas idéaux.

La transformée en z de l'amplificateur est détaillée dans l'annexe A.1.1.



(a) Amplitude (intégrateur non inverseur et inverseur)

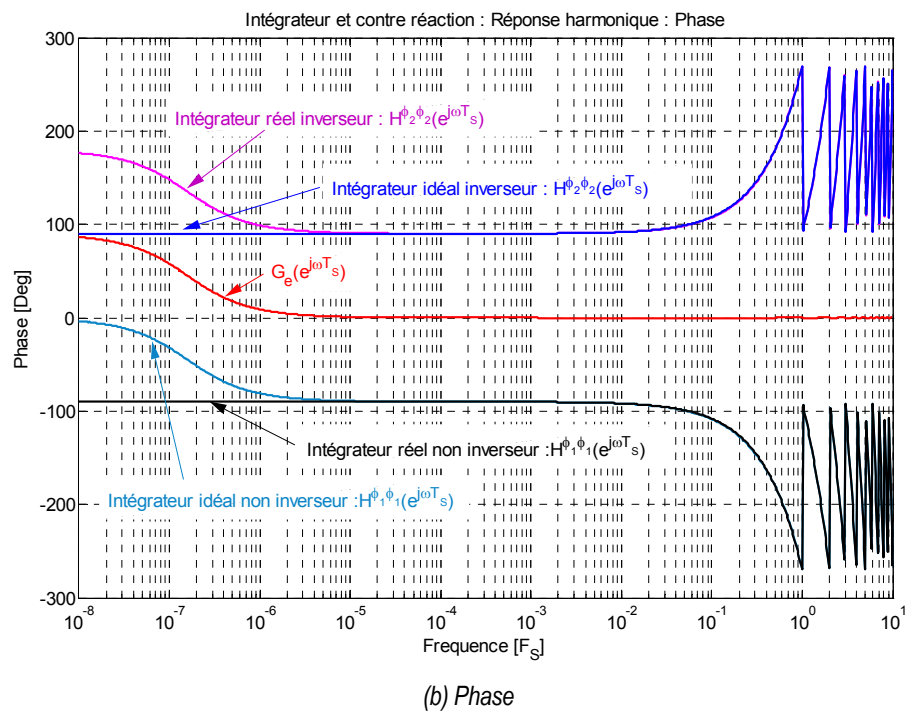


Figure 8-55 : Intégrateur avec amplificateur non idéal

## 8.6 MODÈLE DES CIRCUITS À CAPACITÉS COMMUTÉES À DEUX PHASES D'HORLOGE.

### 8.6.1 Généralités

Le but de cette section est d'offrir un moyen de modélisation des circuits à capacités commutées. Les moyens de simulation dans le domaine fréquentiel sont également abordés. On se limitera néanmoins à deux logiciels fort répandus qui sont Matlab et Spice. Le développement dans le domaine échantillonné des circuits à capacités commutées utilisant deux phases d'horloge non entrelacées est basé sur la transformation de circuits à structure variable dans le temps en circuits invariables avec le temps. L'étude se base sur des circuits constitués d'une source de tension indépendante, un bloc intégrant une capacité et plusieurs commutateurs, une capacité non commutée et un amplificateur opérationnel ou une source indépendante. Nous limiterons l'étude à quatre versions différentes de capacités commutées, soit les structures parallèle, à transrésistance négative, à transrésistance positive et série.

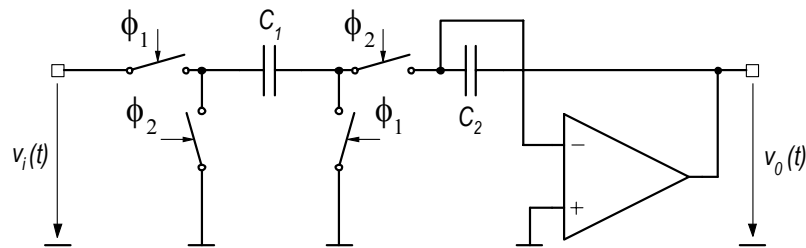
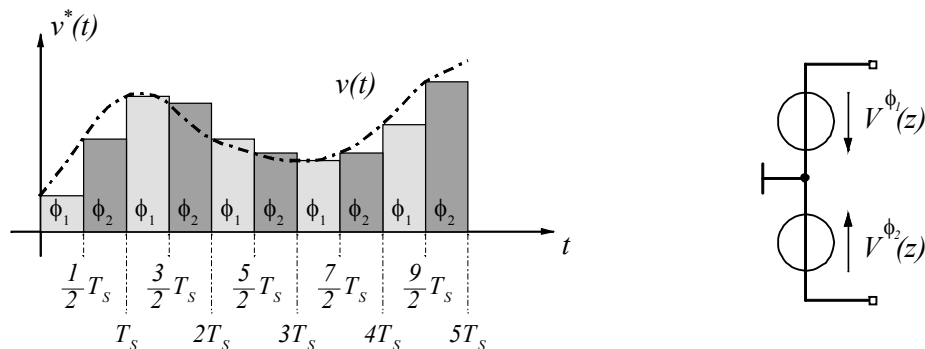


Figure 8-56 : Structure générale d'un circuit à capacités commutées

### 8.6.2 Les sources de tensions indépendantes

Vu la nature biphasée de l'horloge ( $\phi_1, \phi_2$ ), on peut représenter un signal issu d'une source par deux sources indépendantes mais liées par les phases de l'horloge, soit  $V^{\phi_1}$  et  $V^{\phi_2}$  (Figure 8-57 (a)). Il est également possible de décomposer les sources de manière à représenter un signal échantillonné sur une seule phase, soit  $\phi_1$  (Figure 8-57 (b)) ou  $\phi_2$  (Figure 8-57 (c)). Dans les trois cas les tensions des sources changent à chaque période d'échantillonnage  $T_s$ .



Sources dépendantes des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$

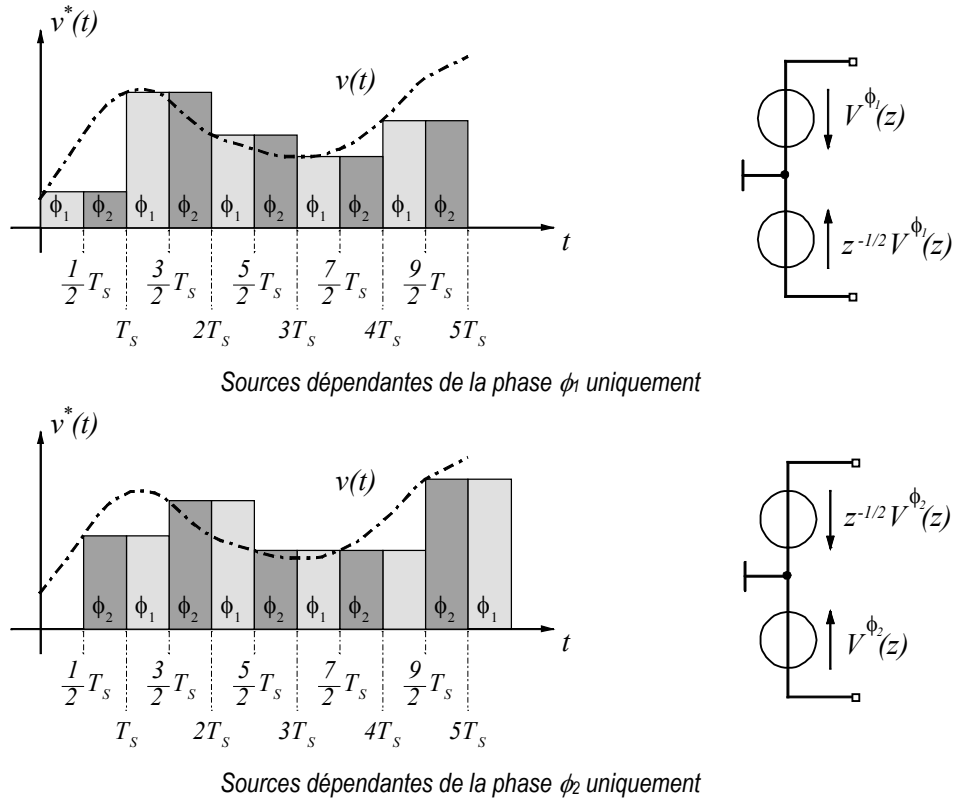


Figure 8-57 : Définition des source indépendantes

**8.6.3 Circuits génériques à capacités commutées**

On rappelle ici les relations mathématiques de base liant la tension aux bornes d'une admittance et le courant qui la traverse.

Le premier cas concerne les admittances qui, lorsqu'une tension est appliquée à leurs bornes, sont parcourues d'un courant sans retard.

$$I(z) = Yz^0V(z) = YV(z) \tag{8-147}$$

Le second cas concerne les admittances qui présentent un retard d'une demi période d'échantillonnage entre l'application d'une tension et l'apparition de la circulation d'un courant.

$$I(z) = Yz^{-1/2}V(z) \tag{8-148}$$

Le troisième cas concerne les admittances qui présente un courant durant une période d'échantillonnage seulement lorsqu'une tension est appliquée à leurs bornes.

$$I(z) = (1 - z^{-1})YV(z) \tag{8-149}$$

**8.6.4 Modèles équivalents et modèles simplifiés des principales structures de circuits à capacités commutées.**

Ce paragraphe montre comment il est possible de trouver le modèle échantillonné des structures génériques. Dans un premier temps le modèle tient compte des deux phases de l'horloge. Compte tenu des sources de tensions et des masses virtuelles (entrée des amplificateurs opérationnels) le modèle peut être transformé en un simple quadripôle

8.6.4.1 Structure parallèle

8.6.4.1.1 Modèle temporel

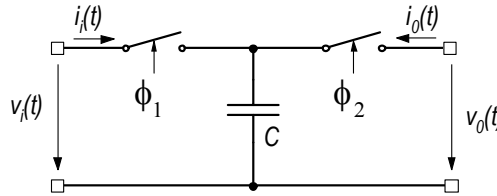


Figure 8-58 : Structure parallèle

Les courants d'entrée et de sortie liés aux tensions respectives et à la capacité du circuit sont donnés par les relations suivantes :

$$I_i^{\phi_1}((n-1)T) = \frac{1}{T_S} C(V_i^{\phi_1}((n-1)T) - V_0^{\phi_2}((n-3/2)T))$$

$$I_0^{\phi_2}((n-1/2)T) = \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) - V_i^{\phi_1}((n-1)T))$$
8-150

8.6.4.1.2 Modèle échantillonné

Pour le courant d'entrée on peut écrire

$$I_i^{\phi_1}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z)z^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{T_S} (CV_i^{\phi_1}(z) - CV_i^{\phi_1}(z)z^{-1/2} + C(V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z))z^{-1/2})$$
8-151

et pour le courant de sortie

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z)z^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{T_S} (CV_0^{\phi_2}(z) - CV_0^{\phi_2}(z)z^{-1/2} + C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z))z^{-1/2})$$
8-152

Le modèle correspondant aux relations 8-151 et 8-152 est donné à la Figure 8-59

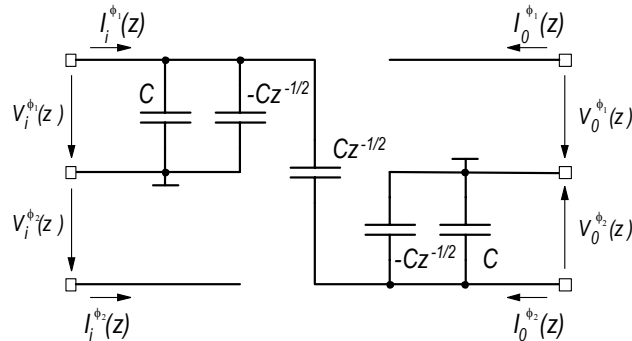


Figure 8-59 : Structure parallèle, modèle équivalent en z

Si l'entrée du quadripôle et la sortie du quadripôle sont connectés à des sources de tension, les condensateurs en parallèle sur l'entrée et sur la sortie n'ont plus aucun rôle et le courant transitant entre l'entrée et la sortie et vice versa deviennent :

$$I_i^{\phi_1}(z) = \frac{Cz^{-1/2}}{T_S} (V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z))$$

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{Cz^{-1/2}}{T_S} (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z))$$

8-153

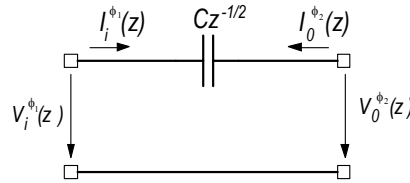


Figure 8-60 : Structure parallèle, modèle simplifié en z

### 8.6.4.2 Structure à transrésistance négative

#### 8.6.4.2.1 Modèle temporel

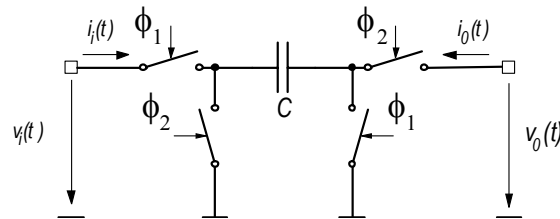


Figure 8-61 : Transrésistance négative

Les courants d'entrée et de sortie liés aux tensions respectives et à la capacité du circuit sont donnés par les relations suivantes :

$$I_i^{\phi_1}((n-1)T) = \frac{1}{T_S} C (V_i^{\phi_1}((n-1)T) + V_0^{\phi_2}((n-3/2)T))$$

$$I_0^{\phi_2}((n-1/2)T) = \frac{1}{T_S} C (V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) + V_i^{\phi_1}((n-1)T))$$

8-154

#### 8.6.4.2.2 Modèle échantillonné

Pour le courant d'entrée on peut écrire

$$\begin{aligned} I_i^{\phi_1}(z) &= \frac{1}{T_S} C (V_i^{\phi_1}(z) + V_0^{\phi_2}(z)z^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{T_S} (CV_i^{\phi_1}(z) + CV_i^{\phi_1}(z)z^{-1/2} - C(V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z))z^{-1/2}) \end{aligned}$$

8-155

et pour le courant de sortie

$$\begin{aligned} I_0^{\phi_2}(z) &= \frac{1}{T_S} C (V_0^{\phi_2}(z) + V_i^{\phi_1}(z)z^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{T_S} (CV_0^{\phi_2}(z) + CV_0^{\phi_2}(z)z^{-1/2} - C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z))z^{-1/2}) \end{aligned}$$

8-156

Le modèle correspondant aux relations 8-155 et 8-156 est donné à la Figure 8-62

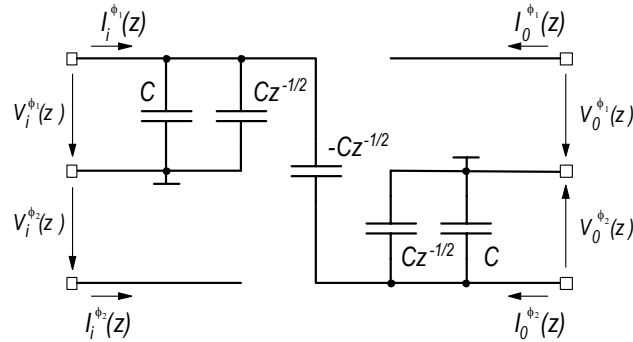


Figure 8-62 : Transrésistance négative, modèle équivalent en z

Si l'entrée du quadripôle et la sortie du quadripôle sont connectés à des sources de tension, les condensateurs en parallèle sur l'entrée et sur la sortie n'ont plus aucun rôle et le courant transitant entre l'entrée et la sortie et vice versa deviennent :

$$I_i^{\phi_1}(z) = \frac{-Cz^{-1/2}}{T_S} (V_i^{\phi_1}(z) - V_o^{\phi_2}(z))$$

$$I_o^{\phi_2}(z) = \frac{-Cz^{-1/2}}{T_S} (V_o^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z))$$

8-157

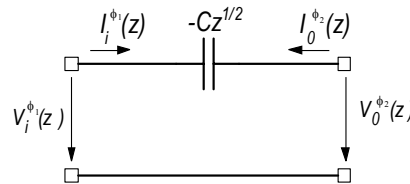


Figure 8-63 : Transrésistance négative, modèle simplifié en z

8.6.4.3 Structure à transrésistance positive

8.6.4.3.1 Modèle temporel

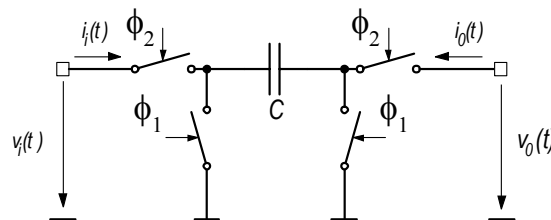


Figure 8-64 : Transrésistance positive

Les courants d'entrée et de sortie liés aux tensions respectives et à la capacité du circuit sont donnés par les relations suivantes :

$$I_i^{\phi_2}((n - 1/2) T) = \frac{1}{T_S} C (V_i^{\phi_2}((n - 1/2) T) - V_o^{\phi_2}((n - 1/2) T))$$

$$I_o^{\phi_1}((n - 1/2) T) = \frac{1}{T_S} C (V_o^{\phi_1}((n - 1/2) T) - V_i^{\phi_1}((n - 1/2) T))$$

8-158

8.6.4.3.2 Modèle échantillonné

Pour le courant d'entrée on peut écrire



$$I_i^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} (V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z)) \tag{8-159}$$

et pour le courant de sortie

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z)) \tag{8-160}$$

Le modèle correspondant aux relations 8-159 et 8-160 est donné à la Figure 8-65

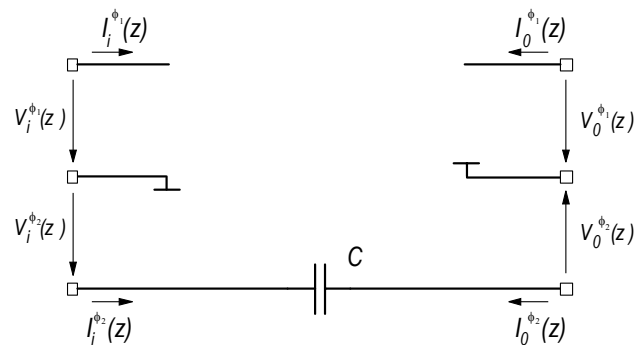


Figure 8-65 : Transrésistance positive, modèle équivalent en z

Si l'entrée du quadripôle et la sortie du quadripôle sont connectés à des sources de tension, les condensateurs en parallèle sur l'entrée et sur la sortie n'ont plus aucun rôle et le courant transitant entre l'entrée et la sortie et vice versa deviennent :

$$I_i^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} (V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z)) \tag{8-161}$$

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z))$$

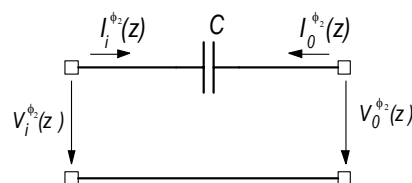


Figure 8-66 : Transrésistance positive, modèle simplifié en z

#### 8.6.4.4 Structure série

##### 8.6.4.4.1 Modèle temporel

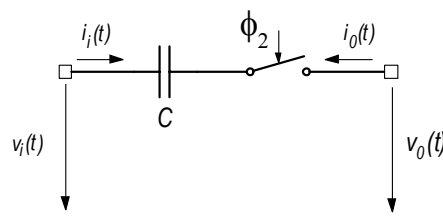


Figure 8-67 : Structure série

Les courants d'entrée et de sortie liés aux tensions respectives et à la capacité du circuit sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_i^{\phi_2}((n-1/2)T) &= \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_2}((n-1/2)T) - V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) \right. \\
 &\quad \left. - \left( V_i^{\phi_2}((n-3/2)T) - V_0^{\phi_2}((n-3/2)T) \right) \right) \\
 I_0^{\phi_2}((n-1/2)T) &= \frac{1}{T_S} C \left( V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) - V_i^{\phi_2}((n-1/2)T) \right. \\
 &\quad \left. - \left( V_0^{\phi_2}((n-3/2)T) - V_i^{\phi_2}((n-3/2)T) \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{8-162}$$

8.6.4.4.2 *Modèle échantillonné*

Pour le courant d'entrée on peut écrire

$$I_i^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) \right) (1 - z^{-1})
 \tag{8-163}$$

et pour le courant de sortie

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{C}{T_S} \left( V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z) \right) (1 - z^{-1})
 \tag{8-164}$$

Le modèle correspondant aux relations 8-163 et 8-164 est donné à la Figure 8-68

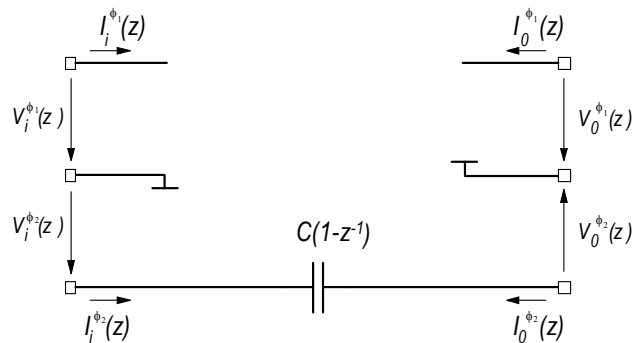


Figure 8-68 : Structure série, modèle équivalent en z

Si l'entrée du quadripôle et la sortie du quadripôle sont connectés à des sources de tension, les condensateurs en parallèle sur l'entrée et sur la sortie n'ont plus aucun rôle et le courant transitant entre l'entrée et la sortie et vice versa deviennent :

$$\begin{aligned}
 I_i^{\phi_2}(z) &= \frac{C}{T_S} \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) \right) (1 - z^{-1}) \\
 I_0^{\phi_2}(z) &= \frac{C}{T_S} \left( V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z) \right) (1 - z^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{8-165}$$

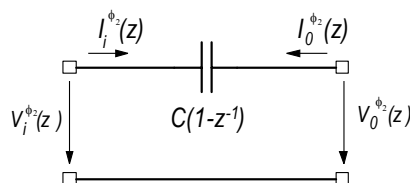


Figure 8-69 : Structure série, modèle simplifié en z

## 8.6.4.5 Capacité non commutée

## 8.6.4.5.1 Modèle temporel

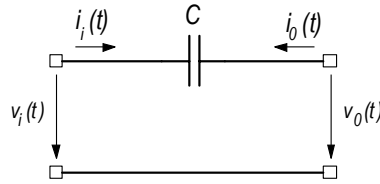


Figure 8-70 : Capacité non commutée

Les courants d'entrée et de sortie liés aux tensions respectives et à la capacité du circuit sont donnés par les relations suivantes :

- pour les courants d'entrée :

$$I_i^{\phi_1}((n-1)T) = \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_1}((n-1)T) - V_0^{\phi_1}((n-1)T) - \left( V_i^{\phi_2}((n-3/2)T) - V_0^{\phi_2}((n-3/2)T) \right) \right) \quad 8-166$$

$$I_i^{\phi_2}((n-1/2)T) = \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_2}((n-1/2)T) - V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) - \left( V_i^{\phi_1}((n-1)T) - V_0^{\phi_1}((n-1)T) \right) \right)$$

- pour les courants de sortie :

$$I_0^{\phi_1}((n-1)T) = \frac{1}{T_S} C \left( V_0^{\phi_1}((n-1)T) - V_i^{\phi_1}((n-1)T) - \left( V_0^{\phi_2}((n-3/2)T) - V_i^{\phi_2}((n-3/2)T) \right) \right) \quad 8-167$$

$$I_0^{\phi_2}((n-1/2)T) = \frac{1}{T_S} C \left( V_0^{\phi_2}((n-1/2)T) - V_i^{\phi_2}((n-1/2)T) - \left( V_i^{\phi_1}((n-1)T) - V_0^{\phi_1}((n-1)T) \right) \right)$$

## 8.6.4.5.2 Modèle échantillonné

Pour le courant d'entrée on peut écrire

$$I_i^{\phi_1}(z) = \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_1}(z) - \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) \right) z^{-1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_1}(z) + \left( V_i^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_2}(z) \right) z^{-1/2} - \left( V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z) \right) z^{-1/2} \right) \quad 8-168$$

$$I_i^{\phi_2}(z) = \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) - \left( V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_1}(z) \right) z^{-1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{T_S} C \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) + \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z) \right) z^{-1/2} - \left( V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_1}(z) \right) z^{-1/2} \right)$$

et pour le courant de sortie

$$\begin{aligned}
 I_0^{\phi_1}(z) &= \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_1}(z) - (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z))z^{-1/2}) \\
 &= \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_1}(z) + (V_0^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_2}(z))z^{-1/2} - (V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_2}(z))z^{-1/2}) \\
 I_0^{\phi_2}(z) &= \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z) - (V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_1}(z))z^{-1/2}) \\
 &= \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z) + (V_0^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_1}(z))z^{-1/2} - (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_1}(z))z^{-1/2})
 \end{aligned}$$

8-169

Le modèle correspondant aux relations 8-168 et 8-169 est donné à la Figure 8-71

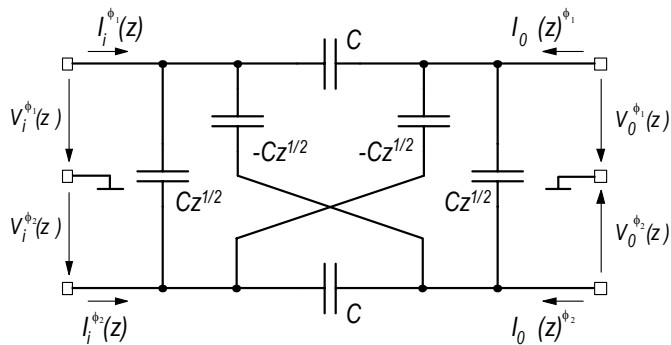


Figure 8-71 : Capacité non commutée, modèle équivalent en z

Si l'entrée du quadripôle et la sortie du quadripôle sont connectés à des sources de tension, les condensateurs en parallèle sur l'entrée et sur la sortie n'ont plus aucun rôle et les courants transitant entre l'entrée et la sortie et vice versa deviennent :

$$I_i^{\phi_1}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_1}(z) - (V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z))z^{-1/2})$$

8-170

$$I_i^{\phi_2}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_i^{\phi_2}(z) - V_0^{\phi_2}(z) - (V_i^{\phi_1}(z) - V_0^{\phi_1}(z))z^{-1/2})$$

$$I_0^{\phi_1}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_1}(z) - (V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z))z^{-1/2})$$

8-171

$$I_0^{\phi_2}(z) = \frac{1}{T_S} C(V_0^{\phi_2}(z) - V_i^{\phi_2}(z) - (V_0^{\phi_1}(z) - V_i^{\phi_1}(z))z^{-1/2})$$

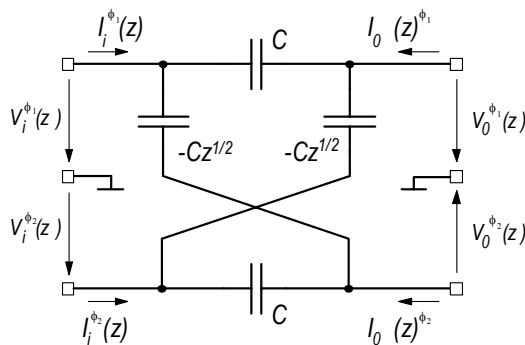


Figure 8-72 : Capacité non commutée, modèle simplifié en z

### 8.6.4.6 Modèle de l'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel peut être décomposé en deux sources de tension, commandées en tension, correspondant aux deux phases de l'horloge.

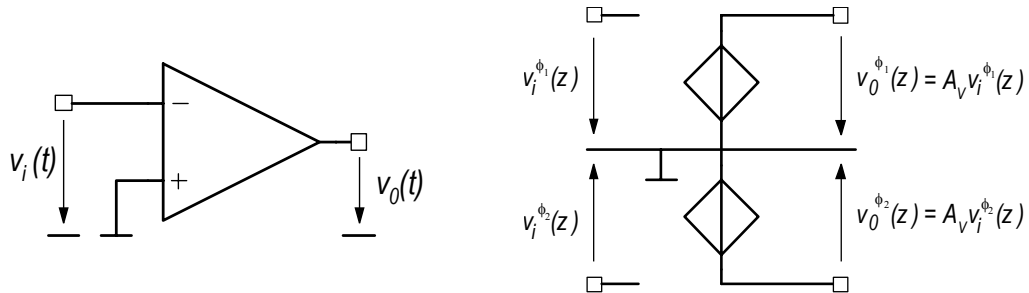


Figure 8-73 : Modèle de l'amplificateur opérationnel

### 8.6.5 Simulation de circuits à capacités commutées à l'aide SPICE

Le but de ce paragraphe est de proposer une solution fiable pour simuler un circuit à capacités commutées dans le domaine fréquentiel (réponse harmonique) à l'aide de simulateur basé sur SPICE®.

Les modèles définis aux paragraphes précédant sont constitués de conductances, de retard pur et de sources de tension. Les retards purs peuvent facilement être simulés par SPICE® en utilisant le modèle d'un « storistor ». Un storistor est un quadripôle permettant de créer un retard entre son entrée et sa sortie. Il peut donc réaliser la fonction suivante

$$V_o(t) = V_i(t - T_D) \quad 8-172$$

Il est donc possible de créer la fonction suivante

$$i(t) = \pm C(v_i(t - T_D) - v_o(t - T_D)) \quad 8-173$$

Le temps de retard  $T_D$  pouvant être assimiler à la période de l'horloge d'un circuit à capacités commutées. Dans le domaine échantillonné (transformée en  $z$ ), on peut donc écrire par exemple

$$I(z) = \pm C z^{-1/2} (v_i(z) - v_o(z)) \quad 8-174$$

On peut alors utiliser les propriétés des blocs hiérarchiques de SPICE,

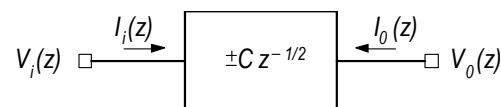


Figure 8-74 : Bloc hiérarchique du modèle SPICE pour une structure parallèle et une transrésistance négative

Dont le contenu est réaliser par une source de courant commandée en tension, un storistor (ligne à retard) et un amplificateur différentiel de gain unité.

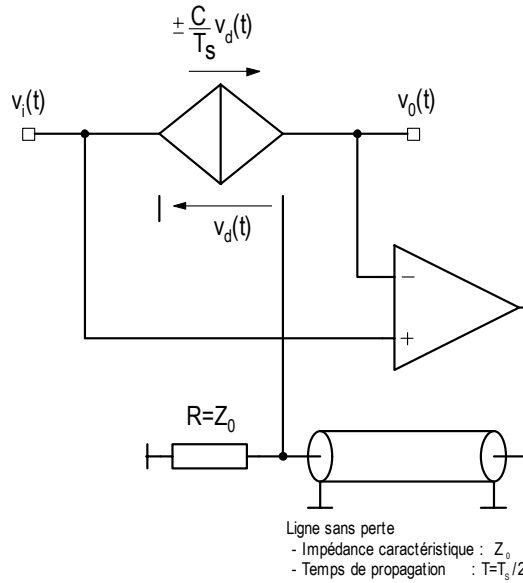


Figure 8-75 : Modèle SPICE pour une structure parallèle et une transrésistance négative

Pour une structure série, il faut répondre à la relation suivante :

$$I(z) = C(1 - z^{-1})(v_i(z) - v_o(z))$$

8-175

Dont le bloc hiérarchique est représenté par la figure suivante

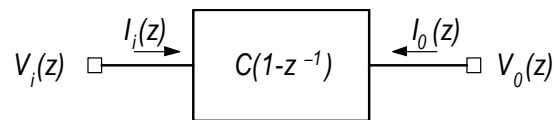


Figure 8-76 : Bloc hiérarchique du modèle SPICE pour une structure série

Le modèle de simulation équivalent se présente selon la Figure 8-77

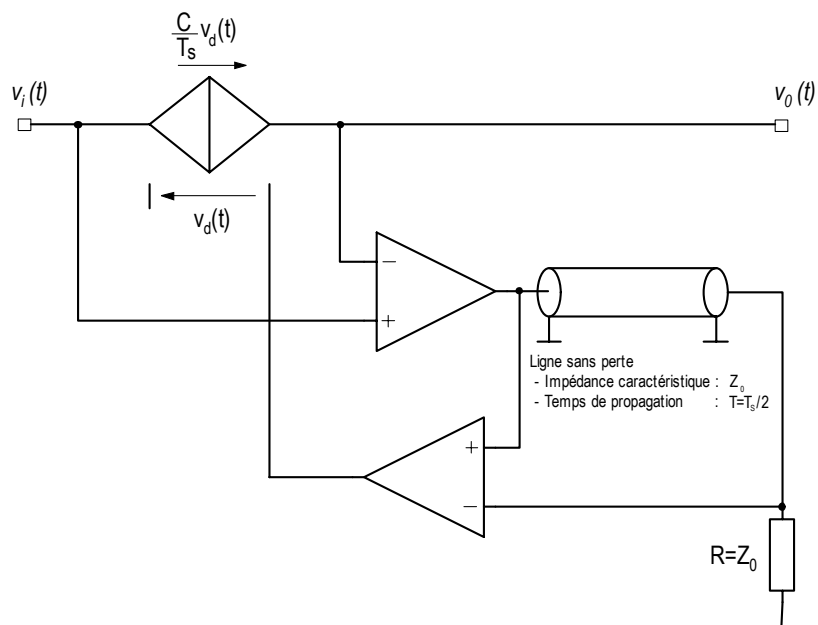


Figure 8-77 : Modèle SPICE pour une structure série

A partir de ces deux modèles hiérarchiques il est possible de simuler la plus part des circuits à capacités commutée à deux phases d'horloge non entrelacées.

## 8.7 FILTRE À CAPACITÉS COMMUTÉES DU 1<sup>ER</sup> ORDRE

### 8.7.1 Généralités

Il existe deux approches pour le design des filtres à capacités commutées. La première utilise le couplage d'intégrateurs, la seconde propose la mise en cascade de filtre du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre. Cette section est une introduction sommaire au filtre du 1<sup>er</sup> ordre.

La fonction de transfert d'un filtre du 1<sup>er</sup> ordre dans le domaine continu (transformée en s) peut être exprimée par la relation générale suivante :

$$H(s) = \frac{a_1 s \pm a_0}{s + b_0} \quad 8-176$$

Cette fonction de transfert possède un pôle et un zéro. Si  $a_1=0$ , la fonction de transfert est un passe-bas, Si  $a_0=0$  la fonction de transfert est un passe-haut.

Dans le domaine échantillonné (transformée en z) la fonction de transfert équivalente est définie comme :

$$H(z) = \frac{A_1 z \pm A_0}{z + B_0} = \frac{A_1 \pm A_0 z^{-1}}{1 + B_0 z^{-1}} \quad 8-177$$

### 8.7.2 Filtre passe-bas du 1<sup>ère</sup> ordre

La Figure 8-78 montre la structure d'un filtre à capacités commutées du 1<sup>er</sup> ordre non inverseur.

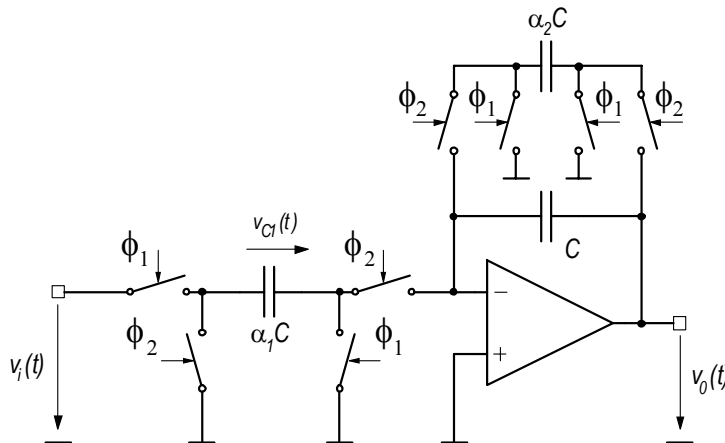


Figure 8-78 : Filtre passe-bas à capacités commutées

Ce filtre peut être modifié selon la Figure 8-79. La structure obtenue est celle d'un intégrateur sommateur. Les commutateurs placés sur l'entrée (-) de l'amplificateur (à l'intérieur du rectangle gris) peut être combinés afin d'en limiter le nombre.

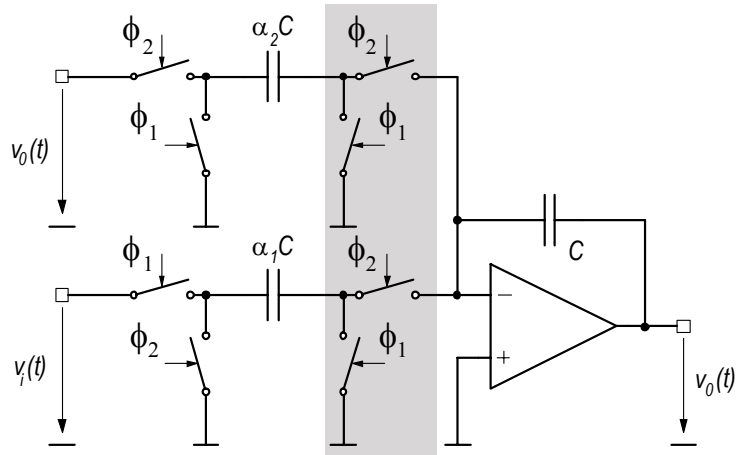


Figure 8-79 : Filtre passe-bas à capacités commutées : schéma modifié

La structure de la Figure 8-79 peut encore être modifiée en ajoutant un commutateur commandé par  $\phi_2$ . La Figure 8-80 permet de mettre en évidence trois structures. La première correspond à une transrésistance négative, la seconde à une résistance positive et la troisième à une structure série.

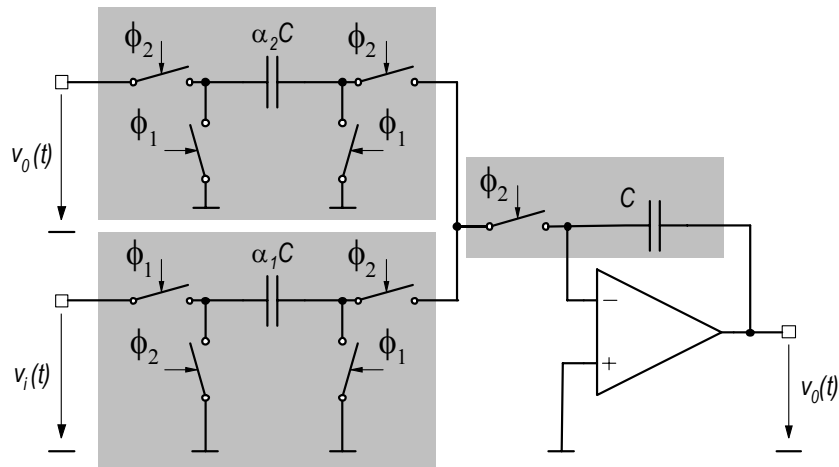


Figure 8-80 : Filtre passe-bas à capacités commutées : mis en évidence des structures

A partir des considérations précédentes, on peut dessiner le schéma structurel de la Figure 8-81.

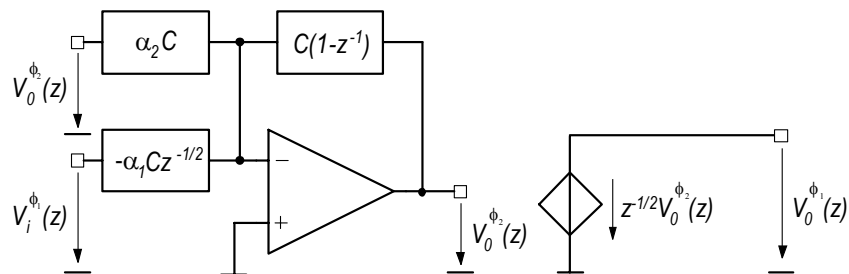


Figure 8-81 : Filtre passe-bas à capacités commutées : schéma structurel

A partir du schéma structurel, on peut déterminer la somme des courants sur le noeud (-) de l'amplificateur.



$$\alpha_2 C V_0^{\phi_2}(z) - \alpha_1 C z^{-1/2} V_i^{\phi_1}(z) + (1 - z^{-1}) C V_0^{\phi_2}(z) = 0 \quad 8-178$$

En finalement la relation liant les tensions d'entrée et de sortie du filtre

$$V_0^{\phi_2}(z) = \frac{\alpha_1 z^{1/2}}{(\alpha_2 + 1)z - 1} V_i^{\phi_1}(z) \quad 8-179$$

La fonction de transfert compte tenu des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de l'horloge

$$H_0^{\phi_2\phi_1}(z) = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2} \frac{z^{1/2}}{z - \frac{1}{1 + \alpha_2}} \quad 8-180$$

En se référant à la phase  $\phi_1$  de l'horloge, la fonction de transfert prend la forme finale suivante :

$$H_0^{\phi_1\phi_1}(z) = \frac{\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2}}{z - \frac{1}{1 + \alpha_2}} \underbrace{=}_{\substack{\alpha_1 = \frac{b_0}{a_0} \\ \alpha_2 = \frac{1 - b_0}{b_0}}} \frac{a_0}{b_1 z + b_0} \quad 8-181$$

Exemple :

Soit un filtre passe-bas du 1<sup>ère</sup> ordre dont les caractéristiques sont les suivantes :

1. Fréquence d'échantillonnage  $F_S = 100\text{kHz}$
2. Fréquence de coupure  $F_{C[-3\text{dB}]} = 1\text{kHz}$
3. Gain dans la bande passante :  $G = 10\text{V/V}$

La fréquence de coupure  $F_{C[-3\text{dB}]}$  étant 100 fois inférieure à la fréquence d'échantillonnage, on peut faire l'approximation suivante :

$$z^{-1} = e^{-sT_S} = 1 - sT_S + \dots \cong 1 - sT_S \quad 8-182$$

et

$$1 - z^{-1} = 1 - e^{-sT_S} = sT_S + \dots \cong sT_S \quad 8-183$$

En réécrivant la relation 8-181 sous la forme

$$H_0^{\phi_1\phi_1}(z) = \frac{\alpha_1 z^{-1}}{1 + \alpha_2 - z^{-1}} \quad 8-184$$

on a

$$H_0^{\phi_1\phi_1}(s) \cong \frac{\alpha_1 (1 - sT_S)}{\alpha_2 + sT_S} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{1 + s \frac{T_S}{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{sT_S}{1 + s \frac{T_S}{\alpha_2}} \quad 8-185$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cong 0 \text{ pour } \omega \ll F_S}$

Les valeurs numériques de l'exemple nous donnent

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 10\alpha_2 \\ \alpha_2 = \frac{\omega_{C[-3dB]}}{F_S} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.628 \\ \alpha_2 = 0.0628 \end{array}$$

8-186

La Figure 8-82 montre les réponses harmoniques des filtres passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre en continu et en échantillonné. On voit que pour des fréquences inférieures au dixième de la fréquence d'échantillonnage les deux filtres ont le même comportement. L'utilisation de MATLAB ou de SPICE donne les mêmes résultats pour le filtre échantillonné.

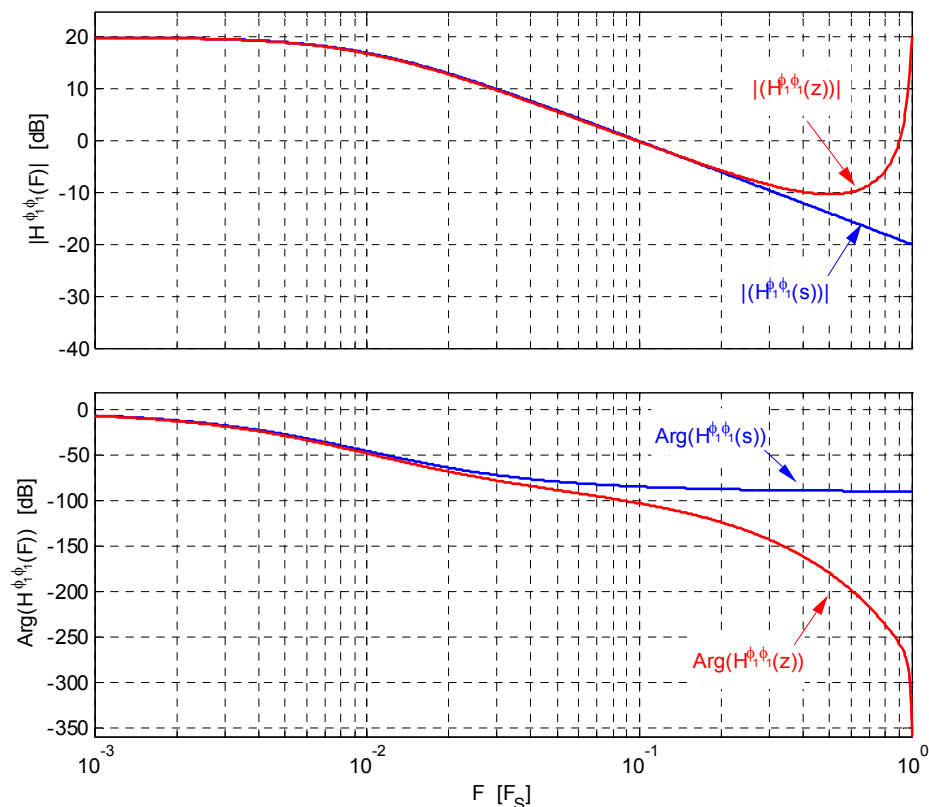


Figure 8-82 : Réponse harmonique du filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

Cet exemple montre qu'il est possible de réaliser des filtres à capacités commutées. Il faut néanmoins prendre les mêmes précautions d'usage pour les systèmes échantillonnés. Pour plus de détail sur les filtres, voir le chapitre 9 : Les filtres à capacités commutées du cours de systèmes électroniques.

## A. ANNEXES

### A.1.1 Transformée en z de la fonction de transfert de l'amplificateur

On assimile la caractéristique de gain de l'amplificateur non idéal à un passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre donc la fonction de transfert est la suivante :

$$A(s) = \frac{A(0)}{1 + s \frac{1}{\omega_T}} = A(0) \frac{\omega_T}{\omega_T + s} \quad 8-187$$

La transformée en z de la fonction de transfert de l'amplificateur se détermine à partir d'une table de transformée.

$$A(z) = Z(A(s)) = A(0) \omega_T T_s \frac{z}{z - e^{-\omega_T T_s}} \quad 8-188$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1]
- [2]
- [3]
- [4]
- [5]