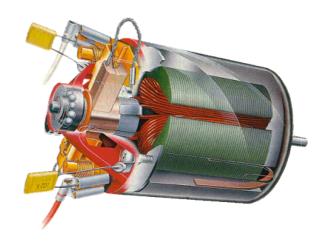




Systèmes électromécaniques

Chapitre 02

CONVERSION ÉLECTROMÉCANIQUE



CD\SEM\Cours\Chan02 M Correvon

$T \ A \ B \ L \ E \quad D \ E \ S \quad M \ A \ T \ I \ E \ R \ E \ S$

		<u>PAGE</u>
2. CONV	VERSION ELECTROMÉCANIQUE	1
2.1 In	VTRODUCTION	1
2.1.1	Généralités	1
2.1.2	Propriétés générales de la conversion électromécanique	1
2.1.3	Caractéristiques de la conversion électromécanique	
2.1.4	Système électromécanique	1
2.2 T	ENTATIVE DU CALCUL DE LA FORCE PRODUITE PAR UN ÉLECTROAIMANT	3
2.3 F	ORME INTERMÉDIAIRE D'ÉNERGIE	
2.3.1	Conversion électromécanique	
2.4 E	XPRESSION DE LA CONSERVATION D'ÉNERGEIE	
2.4.1	Définition des variables	
2.4.2	Définition de l'énergie magnétique W _m	
2.4.3	Définition de la coénergie W _C	
2.4.4	Cas des circuits linéaires (non saturés)	
2.4.5	Tensions induites pour des circuits linéaires	15
2.5 F	ORCES (COUPLES) GÉNÉRÉS POUR DIVERSES TOPOLOGIES DE CIRCUITS	16
2.5.1	Effet réluctant	
2.5.2	Interaction entre deux sources de potentiel magnétique	
253	Force réluctante et force liée à l'interaction entre deux sources de force magnétomotrice	20

Bibliographie

2. CONVERSION ELECTROMÉCANIQUE

2.1 Introduction

2.1.1 Généralités

Le but de ce chapitre est de donner les justifications essentielles pour comprendre le principe de la transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique. En effet l'énergie électrique est une forme secondaire d'énergie qui ne présente que fort peu d'utilisation directe. En revanche, elle est une forme intermédiaire très intéressante par sa facilité de transport, sa souplesse et ses possibilités de conversion. Parmi toutes les possibilités de transformation, la forme électromécanique joue un rôle particulièrement important. Il faut savoir que 95% de la production d'énergie électrique résulte d'une conversion mécanique – électrique.

La conversion électromécanique joue un rôle important dans les domaines aussi variés que la traction électrique (transports publics, voitures électriques et hybrides), les machines outils utilisés aussi bien pour les machines d'emballages, la production alimentaire, la microélectronique, ...,ou encore la domotique.

2.1.2 Propriétés générales de la conversion électromécanique

La conversion électromécanique telle qu'elle sera vue dans ce cours, présente les caractères communs suivants :

- recherche d'un rendement énergétique élevé,
- systèmes réversibles, c'est-à-dire capables de convertir aussi bien l'énergie électrique en énergie mécanique que le contraire,
- la fiabilité et la durée de vie.

2.1.3 Caractéristiques de la conversion électromécanique

L'étude de la conversion électromécanique est basée sur le principe de conservation de l'énergie. Celui-ci fait appel à une forme intermédiaire d'énergie, il s'agit de l'énergie électromagnétique ou de sa forme homologue, la coénergie magnétique. La force ou le couple électromécanique résulte de trois formes possibles d'interactions :

- l'interaction entre deux courants,
- l'interaction entre un courant et un circuit ferromagnétique,
- l'interaction entre un aimant et un courant ou un circuit ferromagnétique.

2.1.4 Système électromécanique

2.1.4.1 Définition du système

Un système électromécanique est caractérisé par k circuits électriques repérés par l'indice n $(n=1,\ldots,k)$. On peut associer à ceux-ci autant de courants i_k , de tension u_k et de flux totalisés ψ_k . Ces diverses grandeurs sont reliées par la relation générale

$$u_n = R_n i_n + \frac{\partial \psi_n}{\partial t}$$
 2.1

Un tel système, soit un moteur, un relais, un dispositif de mesure, est géométriquement déformable. Il possède j degrés de libertés, caractérisés par j coordonnées généralisées x_m (m=1,...j). Il peut s'agir d'un angle ou d'un déplacement linéaire.

2.1.4.2 Dépendance des flux totalisés et des courants

Le flux totalisé est lié aux courants par la relation :

$$\psi_{n} = \sum_{p=1}^{k} L_{np} i_{p} = \sum_{p=1}^{k} N_{n} N_{p} \Lambda_{np} i_{p}$$
 2.2

avec

$$\Lambda_{np} = \int_{S} \frac{\mu}{l} \, dA \tag{2.3}$$

Les grandeurs l et A peuvent être des constantes du système ou des fonctions des paramètres x_m . Il en résulte la dépendance paramétrique suivante du flux totalisé :

$$\psi_n = \psi_n(i_1...i_k, x_1...x_k)$$
 2.4

Réciproquement, on peut écrire pour les courants :

$$i_n = i_n(\psi_1...\psi_k, x_1...x_k)$$
 2.5

2.1.4.3 Forces généralisées liées au système

Le système décrit est le siège de forces généralisées d'origine électromagnétique. Celles-ci peuvent être des forces $(F_m$ dans la direction $x_m)$ ou des couples $(T_m$ relatif à l'angle $\phi_m)$. Par analogie avec les propriétés des flux totalisés, on postulera que les forces d'origine électromagnétique sont des fonctions des courants et des coordonnées :

$$F_m = F_m(i_1...i_k, x_1...x_j) 2.6$$

ou encore

$$F_m = F_m(\psi_1...\psi_k, x_1...x_i)$$
 2.7

2.9

2.2 TENTATIVE DU CALCUL DE LA FORCE PRODUITE PAR UN ÉLECTROAIMANT

Soit un électroaimant constitué d'un circuit magnétique déformable et d'une bobine de n spires comme illustré à la Figure 2-1.

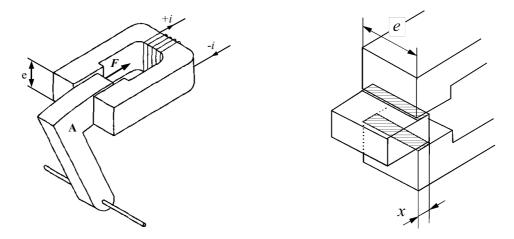


Figure 2-1: Electroaimant

Lorsqu'un courant circule dans la bobine un flux magnétique circule dans la pièce mobile provoquant une force susceptible de centrer la partie mobile dans l'entrefer afin de minimiser la réluctance du circuit magnétique. En admettant une perméabilité relative du fer infinie $(\mu_{rfer}=\infty, \Rightarrow H_{fer}=0)$, on peut calculer selon le théorème d'Ampère :

$$\oint_{S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{\delta} \frac{\delta}{2} + H_{\delta} \frac{\delta}{2} = H_{\delta} \delta = ni$$
2.8

Le champ d'induction magnétique dans l'entrefer vaut donc

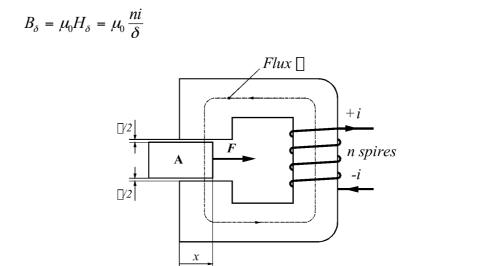


Figure 2-2 : Schéma électromagnétique équivalent

L'épaisseur du circuit magnétique étant e et la longueur de pénétration de la partie mobile x, il est possible d'écrire, en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de flux de fuite (tout le flux passe par les entrefers $\delta/2$) :

$$\phi = \phi_{\delta} = \phi_{fer} = exB_{\delta} = ex\mu_0 \frac{ni}{\delta}$$
 2.10

En supposant une variation ∂x de position de la partie mobile dans l'entrefer, ceci en un temps ∂t , on peut calculer d'une part la variation du flux

$$\partial \phi = \partial \phi_{\delta} = \partial \phi_{fer} = e \mu_0 \frac{ni}{\delta} \partial x$$
 2.11

et d'autre part la tension induite de mouvement provoquée par la vitesse de déplacement

$$u_{i} = \frac{\partial \psi_{fer}}{\partial t} = n \frac{\partial \phi_{fer}}{\partial t} = e \mu_{0} \frac{n^{2} i}{\delta} \frac{\partial x}{\partial t}$$
2.12

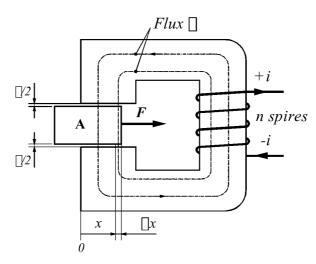


Figure 2-3 : Système électromécanique à réluctance variable

Le courant circulant dans la bobine est supposé constant, on peut donc déterminer, en faisant l'hypothèse que la résistance de la bobine est nulle, l'énergie électrique que la source doit apporter durant le déplacement

$$\partial W_{el} = \int_{t}^{t+\partial t} u_{i} i dt = u_{i} i \partial t = e \mu_{0} \frac{(ni)^{2}}{\delta} \partial x = \underbrace{\frac{B_{\delta}^{2}}{\mu_{0}}}_{ni = \frac{B_{\delta}}{\mu_{0}} \delta} e \delta \partial x$$
2.13

Le travail fourni par la source est converti d'une part en énergie magnétique et d'autre part en énergie mécanique.

L'augmentation de l'énergie magnétique dans l'entrefer est définie comme

$$\partial W_m = \int_0^{B_{\delta}} H_{\delta} dB_{\delta} \partial V = \int_0^{B_{\delta}} \frac{B_{\delta}}{\mu_0} dB_{\delta} e \delta \, \partial x = \frac{1}{2} \frac{B_{\delta}^2}{\mu_0} e \delta \, \partial x$$
 2.14

En observant les relations 2.13 et 2.14, on voit que l'augmentation de l'énergie magnétique correspond à la moitié de l'énergie électrique apportée par la source. En utilisant le principe de la conservation de l'énergie, on peut affirmer que l'énergie restante est de l'énergie mécanique puisque le système ne comporte aucune perte.

En effet on peut calculer la variation de l'énergie mécanique par la relation

$$\partial W_{mec} = F \partial x = \partial W_{el} - \partial W_{m} = \partial W_{C} = \frac{1}{2} \frac{B_{\delta}^{2}}{\mu_{0}} e \delta \, \partial x$$
 2.15

A partir de la relation générale $\partial W_{mec} = \mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{x}$ liant l'énergie mécanique à la force et au déplacement, on peut écrire :

$$F = \frac{\partial W_{mec}}{\partial x} = \frac{\partial W_C}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{B_\delta^2}{\mu_0} e \delta = \frac{1}{2} \frac{(ni)^2}{\delta} \mu_0 e$$
 2.16

 W_{C} est définie comme la coénergie, dont il sera abondamment question dans ce chapitre. On a donc démontré de manière intuitive qu'un électro-aimant est capable de produire de l'énergie mécanique.

2.3 FORME INTERMÉDIAIRE D'ÉNERGIE

2.3.1 Conversion électromécanique

Dans une transformation d'énergie électrique en énergie mécanique, il apparaît également une conversion d'énergie électrique ou mécanique en énergie thermique par effet joule. Cette dernière présente un caractère irréversible. Le bilan énergétique faisant intervenir les formes électrique, mécanique et thermique n'est généralement pas équilibré, en particulier en régime transitoire. Il faut donc tenir compte d'une quatrième forme d'énergie associée à la conversion électromécanique. Il s'agit de l'énergie magnétique. La Figure 2-4 illustre le principe de conversion électromécanique et son inverse.

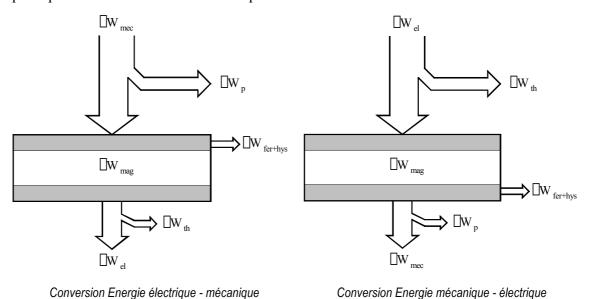


Figure 2-4 : Bilan de la conversion d'énergie électromécanique

2.4 EXPRESSION DE LA CONSERVATION D'ÉNERGEIE

2.4.1 Définition des variables

Le but de ce paragraphe est d'obtenir les relations élémentaires liant le couple ou la force électromagnétique aux grandeurs caractéristiques d'un actuateur soumis à des sollicitations électriques externes. Pour être assez général, nous admettons que l'actuateur comporte k enroulements dont chacun est connecté à une source de tension u_k fournissant un courant i_k . Pour alléger l'écriture, les calculs sont faits de manière matricielle. La définition des divers vecteurs et matrices est la suivante

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_k \end{bmatrix} \qquad \qquad Vecteurs \ des \ tensions \ aux \ bornes \ des \ k \\ enroulements$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_k \end{bmatrix} \qquad \qquad Vecteurs \ des \ courants \ dans \ les \ k \ enroulements$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \qquad \qquad Matrice \ diagonale \ des \ r\'esistances \\ des \ k \ enroulements$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1k} \\ L_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & L_{k-1k} \\ L_{k1} & \dots & L_{kk-1} & L_{kk} \end{bmatrix}$$
 Matrice symétrique des inductances des k enroulements et des mutuelles

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\psi}_k \end{bmatrix}$$

Vecteurs des flux totalisés des k enroulements

Définition de l'énergie magnétique W_m

2.4.2.1 Relations générales

Les k équations des tensions u_k appliquées aux bornes des k enroulements peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Psi}$$
 2.18

En multipliant la relation 2.18 par le vecteur transposé du courant i^T, on obtient

$$\underbrace{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}}_{P_{el}} = \underbrace{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}}_{P_{J}} + \underbrace{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi}_{P_{mec} + P_{mag}}$$
2.19

Le terme du membre de gauche représente la puissance électrique totale Pel fournie à la machine par les sources de puissance électrique. Cette puissance se répartit en :

- puissance magnétique $P_{mag} = \frac{\partial}{\partial t} W_m$ ou variation de l'énergie magnétique emmagasinée dans la machine,
- puissance Joule dissipée dans les conducteurs $P_J = \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}$,
- puissance mécanique P_{mec} fournie à l'extérieur, au moyen du travail des forces et des couples.

Pour un actuateur rotatif, on parle de couple électromagnétique T_{em}

$$P_{mec} = T_{em} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vartheta ag{2.20}$$

où θ représente la position angulaire.

Pour un actuateur linéaire, on parle de force électromagnétique F_{em}

$$P_{mec} = F_{em} \cdot \frac{\partial}{\partial t} x \tag{2.21}$$

où x représente la position linéaire.

De ce qui précède, on en déduit immédiatement que pour un actuateur rotatif :

$$P_{mec} = \frac{\partial W_{mec}}{\partial t} = T_{em} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vartheta = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \frac{\partial}{\partial t} W_{m}$$
 2.22

ou sous forme différentielle (variation de l'énergie)

$$\partial W_{mec} = T_{em} \cdot \partial \mathcal{O} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi} - \partial W_{m}$$
 2.23

2.4.2.2 Système aux repos

Au repos, c'est-à-dire sans déformation du circuit magnétique, on peut écrire que $\partial \theta = 0$ ou $\partial x = 0$ et par conséquent $\partial W_{mec} = 0$. Dans ce cas la relation 2.23 devient

$$\partial W_m = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{\Psi}$$
 2.24

On peut illustrer l'énergie magnétique à partir de la caractéristique B=f(H) du circuit magnétique. Cette caractéristique également peut être décrite par la fonction $\psi=f(i)$. De manière générale (caractéristique magnétique non linéaire) on peut écrire pour l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit magnétique

$$W_m = \int_0^{\Psi} \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \Psi = \sum_{n=1}^k \int_0^{\psi_n} i_n \partial \psi_n$$
 2.25

La Figure 2-5 illustre le cas d'un système à une seule source électromagnétique (un seul enroulement k=1).

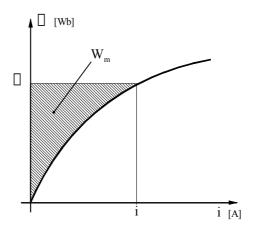


Figure 2-5 : Définition de l'énergie magnétique

2.4.2.3 Forme locale de l'énergie magnétique

A partir de la relation 2.24, on a l'expression d'accroissement de l'énergie magnétique associé à un circuit électrique :

$$\partial W_m = i\partial \psi = Ni\partial \phi = \theta \partial \phi \tag{2.26}$$

Le potentiel magnétique (force magnétomotrice : ϑ) et le flux d'induction magnétique sont définis par les relations générales suivantes

$$\theta_{AB} = \int_{A}^{B} \mathbf{H} \, d\mathbf{l}$$
 2.27

$$\partial \phi = \int_{S} \partial \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$
 2.28

Fort de ces trois relations (2.26, 2.27, 2.28), on peut écrire

$$\partial W_m = \int_V \mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{I} = \int_V \mathbf{H} \partial \mathbf{B} dV$$
2.29

La Figure 2-6 précise l'orientation des divers vecteurs

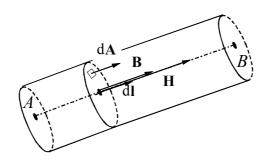


Figure 2-6 : Forme locale de l'énergie magnétique

2.4.2.4 Définition de l'énergie magnétique spécifique

2.4.2.4.1 Milieu magnétique non linéaire

La relation 2.29 permet de définir l'énergie magnétique spécifique, ou énergie magnétique par unité de volume ainsi que son accroissement

$$\partial W_m = HdB$$
 2.30

$$w_m = \int_0^B HdB$$
 2.31

2.4.2.4.2 Milieu magnétique linéaire

Pour un milieu à perméabilité constante, les relations se simplifient comme suit :

$$dB = \mu dH 2.32$$

$$\partial W_m = \mu H dH = \frac{1}{2} \mu dH^2$$
 2.33

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH$$
 2.34

2.4.2.5 Système en mouvement (déformation) à flux constants

Un déplacement infinitésimal $\partial \vartheta$ peut être effectué de multiples manières. On admet ici que le déplacement s'effectue à flux $\psi = cte$ constant dans les bobinages (c'est-à-dire en général à courants variables). Dans ce cas, on a alors $\partial \psi = 0$ et par conséquent la relation 2.23 devient :

$$T_{em} \cdot \partial \, \mathcal{O} = \underbrace{\mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi}}_{0} - \partial W_{m}$$
 2.35

Le couple électromagnétique prend donc la forme suivante

$$T_{em} = -\frac{\partial W_m}{\partial \vartheta}\bigg|_{\Psi_k = \text{cte}}$$
 2.36

Pour un circuit magnétique à un seul enroulement, on peut illustrer la relation existant entre la déformation du circuit magnétique (par exemple un mouvement de rotation d'un angle $\Delta\vartheta$) et la variation de l'énergie magnétique pour un flux totalisé constant ψ

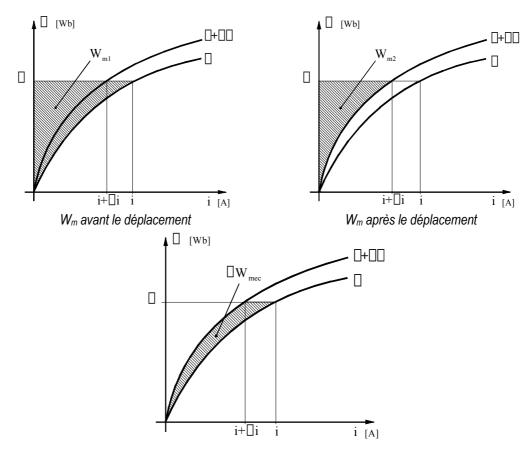


Figure 2-7 : Modification de l'énergie magnétique pour un déplacement angulaire de $\Delta\vartheta$

2.4.3 Définition de la coénergie W_C

2.4.3.1 Système en mouvement (déformation) à courants constants

Au paragraphe 2.4.2.5 on a réalisé un déplacement à flux constant $\partial \psi = \mathbf{0}$. On peut également imaginer un déplacement où les courants sont maintenus constants (c'est-à-dire que les flux varient). Dans ce cas $\partial \mathbf{i}^T = \mathbf{0}$, on peut écrire

$$\mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi} = \partial \left(\mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\psi} \right) - \underbrace{\partial \mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\psi}}_{=0}$$
 2.37

la relation 2.23 devient

$$\partial W_{mec} = T_{em} \cdot \partial \vartheta = \partial \left(\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} - W_{m} \right)_{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = \mathsf{cte}}$$
 2.38

d'où

$$T_{em} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} - W_{m} \right)_{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = \mathbf{cte}}$$
 2.39

On appelle coénergie la quantité

$$W_C = \mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\psi} - W_m \tag{2.40}$$

La Figure 2-8 illustre la relation existant entre énergie magnétique et coénergie pour un système à une seule source électromagnétique (un seul enroulement k=1).

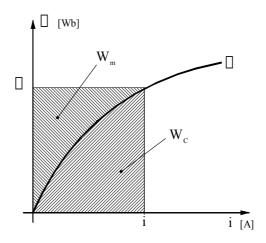


Figure 2-8 : Relation entre énergie magnétisante et coénergie

Finalement on a donc

$$T_{em} = \frac{\partial W_C}{\partial \mathcal{D}}\Big|_{\mathbf{i}^T = \mathsf{cte}}$$
 2.41

Les expressions 2.36 et 2.41 sont, bien sûr, relatives au même couple T_{em} . L'emploi de l'une ou l'autre des expressions ne préjuge en rien de la manière dont sont effectivement alimentés les enroulements dans l'actuateur en fonctionnement. Les efforts sur une structure électromagnétique dans un état donné (à un moment déterminé) sont fonctions uniquement de la position des matériaux magnétiques, de celle des conducteurs et de la valeur des courants, quelle que soit la manière dont ceux-ci ont été créés. Alimenter à flux constants ou à courants constants les enroulements est ici une opération fictive, qui signifie seulement que l'on est en mesure d'évaluer les variations ∂W_m ou ∂W_C associées à $\partial \vartheta$ dans respectivement l'une ou l'autre des deux hypothèses.

De la relation 2.40, on peut écrire

$$\partial W_{C} = \partial (\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} - W_{m}) = \partial (\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi}) - \partial W_{m}$$

$$= \partial \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} + \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi} - \underbrace{\mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi}}_{au \, repos: \partial W_{m}} = \partial \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} = \mathbf{\psi}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{i}$$
2.42

Il est à noter la symétrie entre $\partial W_m = \mathbf{i}^T \cdot \partial \mathbf{\psi}$ et $\partial W_C = \mathbf{\psi}^T \cdot \partial \mathbf{i}$.

Par analogie avec la Figure 2-7, la Figure 2-9 illustre, pour un circuit magnétique à un seul enroulement, la relation existant entre la déformation du circuit magnétique (par exemple un mouvement de rotation d'un angle $\Delta\vartheta$) et la variation de la coénergie et de l'énergie magnétique pour un courant i constant.

En travaillant à courant constant, on voit que l'énergie électrique fournie $\partial W_{elec} = i\partial \psi$ est supérieure à la variation de l'énergie mécanique ∂W_{mec} . La partie supplémentaire de cette énergie électrique est transformée en énergie magnétique stockée dans le circuit magnétique. Une quantification de ce phénomène est donnée dans le paragraphe suivant.

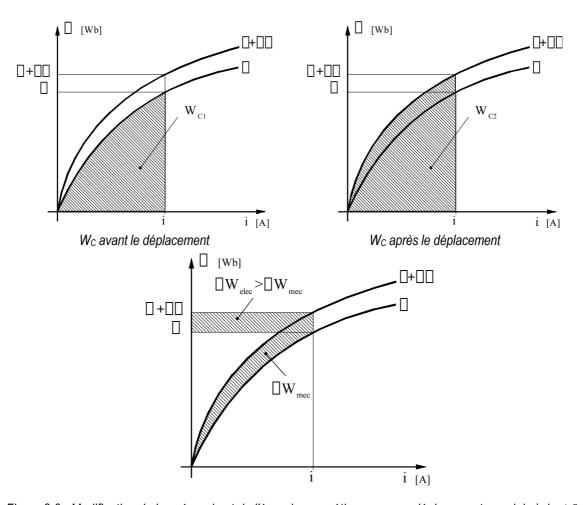


Figure 2-9 : Modification de la coénergie et de l'énergie magnétique pour un déplacement angulaire) de $\Delta \vartheta$

2.4.4 Cas des circuits linéaires (non saturés)

2.4.4.1 Relation entre énergie magnétique et coénergie

Pour un système non saturé, les relations entre les flux et les courants sont linéaires

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{i}$$
 2.43

où L est une matrice carrée symétrique, les termes diagonaux sont les inductances propres de chaque enroulement, les autres termes (non diagonaux) sont les inductances mutuelles entre bobinages (voir relation 2.17)

On peut donc écrire pour l'énergie magnétisante

$$\partial W_m = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \partial \mathbf{\psi} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \partial \mathbf{i}$$
 2.44

et pour la coénergie

$$\partial W_C = \mathbf{\psi}^{\mathsf{T}} \cdot \partial \mathbf{i} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{i})^{\mathsf{T}} \cdot \partial \mathbf{i} = \mathbf{i}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L}^{\mathsf{T}} \cdot \partial \mathbf{i}$$
 2.45

Sachant que la matrice des inductances L est une matrice diagonale symétrique ($L^T=L$)

$$\partial W_C = \partial W_m = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \partial \mathbf{i}$$
 2.46

Il est possible d'illustrer l'égalité entre les accroissements de l'énergie magnétique et de la coénergie en se référant à un circuit magnétique à un seul enroulement.

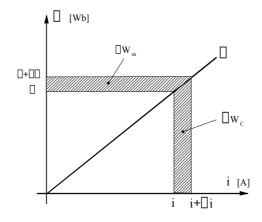


Figure 2-10 : Accroissement de l'énergie magnétique et de la coénergie

2.4.4.2 Relation entre énergie magnétique, mécanique et coénergie

La Figure 2-11 montre que la surface du triangle correspondant à l'accroissement de la coénergie et par conséquent à l'accroissement de l'énergie mécanique vaut la moitié de la surface du rectangle représentant l'énergie électrique fournit au système. Dans ce cas, l'accroissement de l'énergie magnétique est donc identique à celui de la coénergie au signe près.

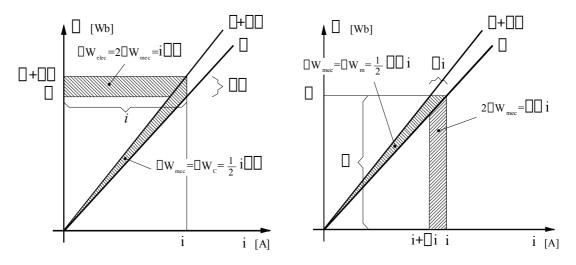


Figure 2-11 : Energie électrique, magnétique, coénergie et énergie mécanique

Selon la définition de la coénergie, on peut écrire

$$W_{C} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^{T} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left(i_{n} \sum_{m=1}^{k} L_{nm} i_{m} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k} L_{nn} i_{n}^{2} + \sum_{n< m}^{k} L_{nm} i_{m} i_{n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left(i_{n} \sum_{m=1}^{k} \psi_{nm} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k} \psi_{nn} i_{n} + \sum_{n< m}^{k} \psi_{nm} i_{n}$$
2.47

Cette expression est classique, mais elle ne s'applique strictement, comme nous venons de le voir, qu'à des systèmes utilisant des matériaux à caractéristiques magnétiques linéaires. L'énergie ayant été exprimée dans la relation 2.47 à partir des courants, il est aisé de calculer le couple à partir de l'expression 2.41.

$$T_{em} = \frac{\partial W_C}{\partial \mathcal{Y}} \bigg|_{\mathbf{i} = \mathbf{cte}} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathcal{Y}} \cdot \mathbf{i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left(i_n \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial L_{nm}}{\partial \mathcal{Y}} i_m \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial L_{nn}}{\partial \mathcal{Y}} i_n^2 + \sum_{n< m}^{k} \frac{\partial L_{nm}}{\partial \mathcal{Y}} i_m i_n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left(i_n \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \mathcal{Y}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \psi_{nn}}{\partial \mathcal{Y}} i_n + \sum_{n< m}^{k} \frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \mathcal{Y}} i_n$$

$$(2.48)$$

Selon les relations 2.41 et 2.47 on a pour l'énergie magnétisante

$$W_{m} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\psi} - \frac{1}{2} \mathbf{i}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{i} \underset{\psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{i}}{=} \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{\psi} \right)^{T} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{\psi}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{\psi}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{L}^{-1} \right)^{T} \cdot \mathbf{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{\psi}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{\psi}$$
2.49

La définition du couple produit à flux constant permet d'écrire, pour un circuit magnétique sans saturation on a $\psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{i}$ (relation 2.43),

$$T_{em} = -\frac{\partial W_m}{\partial \vartheta} \bigg|_{\Psi = \text{cte}} = -\frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial \mathbf{L}^{-1}}{\partial \vartheta} \Psi = -\frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \vartheta}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\sum_{\substack{m=1 \ \Psi_n}}^k \psi_{nm} \frac{\partial i_n}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \psi_{nn} - \sum_{n < m}^k \psi_{nm} \frac{\partial i_n}{\partial \vartheta}$$
2.50

Les inductances propres et mutuelles peuvent être exprimées à l'aide des réluctances ou des perméances

$$L_{nn} = N_n^2 \Lambda_n$$

$$L_{nm} = N_n N_m \Lambda_{nm}$$
2.51

Les forces magnétomotrices (solénation) produit par chaque bobinage sont définies comme

$$F_{\nu} = N_{\nu} i_{\nu}$$
 2.52

Et finalement la relation 2.48 devient

$$T_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial \vartheta} (N_{n} i_{n})^{2} + \sum_{n < m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \vartheta} N_{n} i_{n} N_{m} i_{m}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial \vartheta} (F_{n})^{2} + \sum_{n < m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \vartheta} F_{n} F_{m}$$
2.53

Le premier terme du second membre représente le couple réluctant. Ce couple est indépendant du sens du courant. Le second terme correspond au couple par l'interaction entre

deux sources de forces magnétomotrices indépendantes. On peut citer comme exemple l'interaction entre les aimants du rotor et le courant d'une machine synchrone à aimants permanents.

Pour des mouvements linéaires, le couple devient une force et l'angle ϑ devient une grandeur linéique x.

2.4.5 Tensions induites pour des circuits linéaires

Il existe dans les actuateurs une deuxième caractéristique importante liée aux tensions induites.

$$\psi_{n} = L_{nn}i_{n} + \sum_{m \neq n}^{k} L_{nm}i_{m}$$

$$2.54$$

$$u_{ni} = \frac{\partial \psi_{n}}{\partial t} = \frac{\partial (L_{nn}i_{n})}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k} \frac{\partial (L_{nm}i_{m})}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial L_{nn}}{\partial t}i_{n} + L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k} \left(\frac{\partial L_{nm}}{\partial t}i_{m} + L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial L_{nn}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}i_{n} + L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k} \left(\frac{\partial L_{nm}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}i_{m} + L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}N_{n}^{2}i_{n} + L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k} \left(\frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}N_{n}N_{m}i_{m} + L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t}\right)$$

$$= L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{n \neq m}^{k} L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial \theta}N_{n}^{2}i_{n}\omega + \sum_{m \neq n}^{k}\frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \theta}N_{n}N_{m}i_{m}\omega$$

$$= L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{n \neq m}^{k} L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{nn}}{\partial \theta}\omega + \sum_{m \neq n}^{k}\frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \theta}\omega$$

$$= L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{n \neq m}^{k} L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k}\frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \theta}\omega$$

$$= L_{nn}\frac{\partial i_{n}}{\partial t} + \sum_{n \neq m}^{k} L_{nm}\frac{\partial i_{m}}{\partial t} + \sum_{m \neq n}^{k}\frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \theta}\omega$$

La relation 2.55 montre qu'il existe deux types de tensions induites. La première correspond aux variations de courant dans les inductances

$$u_{ni[L]} = L_{nn} \frac{\partial i_n}{\partial t} + \sum_{m=0}^{k} L_{nm} \frac{\partial i_m}{\partial t}$$
 2.56

La seconde correspond aux tensions induites liées à un mouvement.

$$u_{ni[mvt]} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \vartheta} \omega = \left(\frac{\partial \psi_{nn}}{\partial \vartheta} + \sum_{m \neq n}^{k} \frac{\partial \psi_{nm}}{\partial \vartheta}\right) \omega$$

$$= \left(\frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial \vartheta} N_{n}^{2} i_{n} + \sum_{m \neq n}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \vartheta} N_{n} N_{m} i_{m}\right) \omega = \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial \vartheta} N_{n} N_{m} i_{m} \omega$$

$$2.57$$

Les relations 2.53 et 2.57 vont permettre de mettre en évidence une caractéristique extrêmement importante des actuateurs. Nous nous référerons donc souvent à ces deux relations pour donner une légitimité à nos observations.

2.5 FORCES (COUPLES) GÉNÉRÉS POUR DIVERSES TOPOLOGIES DE CIRCUITS

Un certain nombre d'exemples pratiques illustrés dans cette section, sont mis en relation avec les développements théoriques précédents. Le but est de parvenir à une maîtrise intuitive suffisante pour pouvoir comprendre les phénomènes dont les actuateurs sont le siège. Il faut toutefois se rappeler que, dans ce domaine, le calcul analytique ne peut se faire qu'avec certaines hypothèses très restrictives. En effet un matériau magnétique n'est jamais vraiment linéaire et ses caractéristiques ne sont que partiellement connues.

2.5.1 Effet réluctant

2.5.1.1 *Bobine – Dent*

Dans cet exemple, on place deux barreaux magnétiques l'un en face de l'autre. Un des barreaux est entouré de N spires dans lesquelles circule un courant. Au départ les barreaux sont décalés, il y a un degré de liberté dans le sens transversal uniquement

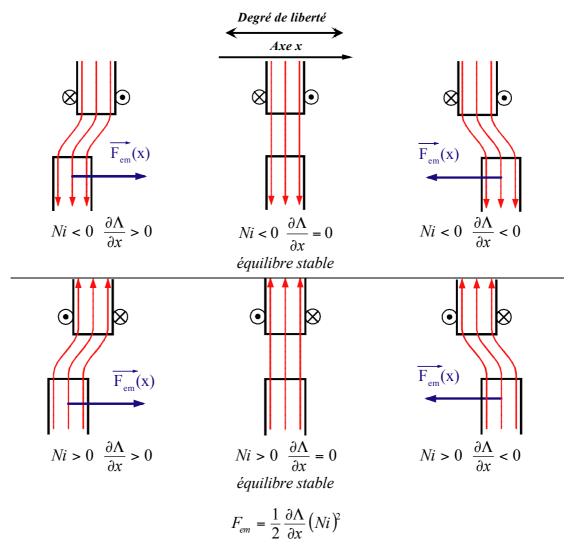


Figure 2-12 : Effet réluctant Bobine - Dent

De la relation générale $F_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial x} (N_n i_n)^2 + \sum_{n \leq m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial x} N_n i_n N_m i_m$ on a ici que le premier

terme du second membre qui subsiste. En effet, il n'y a qu'une source de force magnétomotrice représentée par Ni. On est donc en face d'une force réluctance dont le sens ne dépend que de la variation de la perméance. En position d'équilibre, le circuit présente une réluctance minimale, donc une perméance maximale. A cette valeur maximum la dérivée de la perméance par rapport à l'axe x est nulle. Les moteurs à réluctances variables sont conçus pour travailler selon ce principe. Néanmoins tout moteur dont le circuit magnétique est discontinu (par exemple discontinuités dues aux encoches) présente un couple réluctant dont l'effet se traduit par une ondulation de couple ou de force.

2.5.1.2 *Aimant – Dent*

Dans cet exemple, on place deux barreaux magnétiques l'un en face de l'autre. Un des barreaux contient un aimant en son extrémité. Au départ les barreaux sont décalés, il y a un degré de liberté dans le sens transversal uniquement

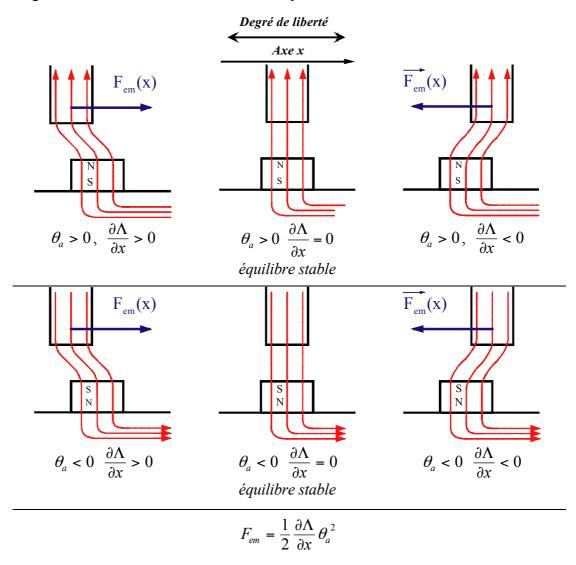


Figure 2-13 : Effet réluctant Aimant – Dent

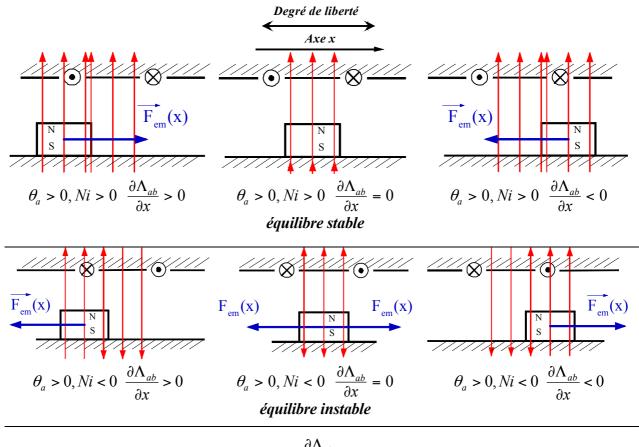
De la relation générale $F_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial x} (N_n i_n)^2 + \sum_{n < m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial x} N_n i_n N_m i_m$ on a ici que le premier

terme du second membre qui subsiste avec $Ni = \theta_a$. En effet, il n'y a qu'une source de force magnétomotrice représentée par l'aimant. On est donc en face d'une force réluctance dont le sens ne dépend que de la variation de la perméance. En position d'équilibre, le circuit présente une réluctance minimale, donc une perméance maximale. A cette valeur maximum la dérivée par rapport à l'axe x est nulle. Les moteurs réluctants polarisés sont conçus pour travailler selon ce principe. Néanmoins tout moteur dont le circuit magnétique est discontinu (par exemple discontinuités dues aux encoches) présente un couple réluctant dont l'effet se traduit par une ondulation de couple ou de force.

2.5.2 Interaction entre deux sources de potentiel magnétique

2.5.2.1 Bobine – Aimant

Dans cet exemple, on place une bobine et un aimant l'un en face de l'autre. Au départ les axes magnétiques de la bobine et de l'aimant sont décalés, il y a un degré de liberté dans le sens transversal uniquement



$$F_{em} = \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \, \theta_a \cdot Ni$$

Figure 2-14 : Interaction entre deux sources de force magnétomotrice

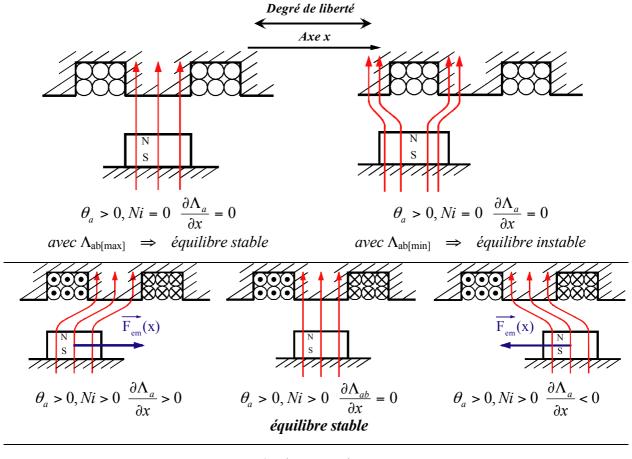
De la relation générale $F_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial x} (N_n i_n)^2 + \sum_{n < m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial x} N_n i_n N_m i_m$ on a ici que le second

terme du second membre qui subsiste. Les sources de force magnétomotrice sont l'aimant (θ_a) et la bobine (Ni). En effet, il n'y a deux sources de forces magnétomotrices représentées par l'aimant et la bobine. On est donc en face d'une force électromotrice dont le sens ne dépend que de la variation de la perméance et du sens du courant dans la bobine. En position d'équilibre, le circuit présente une réluctance minimale, donc une perméance maximale. Les perméances propres à chaque source de force magnétomotrice sont constantes (la perméabilité de l'aimant est égale à celle de l'air). Par contre la perméance Λ_{ab} liée au couplage entre les deux sources varie en fonction de x. Toutefois, selon les sens du courant dans la bobine, la position d'équilibre peut être stable ou instable. Si une variation infinitésimale de la position stable engendre une force qui a tend à rompre l'équilibre, on peut que l'on a à faire à une position d'équilibre instable.

2.5.3 Force réluctante et force liée à l'interaction entre deux sources de force magnétomotrice

2.5.3.1 Bobine, encoche et Aimant

Dans cet exemple, on place une bobine et un aimant l'un en face de l'autre. La bobine est logée dans des encoches. La perméance liée à l'aimant Λ_a est donc variable selon x. La perméabilité de relative de l'aimant étant égale à celle de l'air, la perméance liée à la bobine est constante. Dans ce cas la force électromagnétique résultante est composée d'une force réluctante et d'une force liée à l'interaction entre les deux sources de forces magnétomotrices.



$$F_{em} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_a}{\partial x} \theta_a^2 + \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \theta_a \cdot Ni$$

Figure 2-15 : Interaction composée

De la relation générale
$$F_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nn}}{\partial x} (N_n i_n)^2 + \sum_{n < m}^{k} \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial x} N_n i_n N_m i_m$$
 on a ici le premier

terme du second membre qui représente la force réluctante due aux encoches qui provoque une discontinuité du circuit magnétique vu par l'aimant, le second terme représentant l'interaction entre les deux sources de force magnétomotrice : Bobine – aimant. Cette caractéristique est celle rencontrée dans les moteurs réluctants polarisés (moteurs pas-à-pas) ou certains moteurs à aimants permanents sans collecteur.

2.5.3.2 Force électromagnétique

Dans le cas particulier étudié ici, on peut écrire pour la force électromagnétique

$$F_{em} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_{aa}}{\partial x} \theta_a^2 + \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \theta_a Ni$$
 2.58

Cette force peut être décomposée en une force réluctante

$$F_{rel} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_{aa}}{\partial x} \theta_a^2$$
 2.59

et une force proportionnelle au courant circulant dans le bobinage

$$F_{i} = \underbrace{\frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \theta_{a} N}_{K(x)} i = K(x) i$$
2.60

2.5.3.3 Tension induite de mouvement

La relation 2.57 définit la tension induite de mouvement qui dans le cas particulier prend la forme suivante

$$u_{bi} = \underbrace{\frac{\partial \Lambda_{bb}}{\partial x} N^2 i}_{a \text{ vide}(i=0) = 0} + \frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \theta_a N v = \underbrace{\frac{\partial \Lambda_{ab}}{\partial x} \theta_a N}_{K(x)} v = K(x) v$$
2.61

K(x) est un coefficient de proportionnalité dans la distribution spatiale est identique pour la force produite par le courant circulant dans la bobine et pour la tension induite générée par la vitesse de déplacement relative entre la bobine (non alimentée) et l'aimant. Cette observation est de première importance.

Bibliographie

[1] TRAITE D 'ELECTRICITE

ELECTROMECANIQUE Volume IX Auteur: Prof. Marcel Jufer ISBN 2-88074-285-4

[2] TRAITE D 'ELECTRICITE

ELECTROMAGNETISME Volume III *Auteur: Prof. Fred Gardiol* ISBN 2-604-00005-9

[3] MAGNA PHYSICS PUBLICATIONS – OXFORD SCIENCE PUBLICATION

DESIGN OF BRUSHLESS PERMANENT – MAGNET MOTORS Auteurs: J.R. Hendershot Jr and Tje Miller

ISBN 1-881855-03-1

[4] OXFORD UNIVERSITY PRESS

STEPPING MOTORS AND THEIR MICROPROCESSOR CONTROLS *Auteurs: Takashi Kenjo and Akira Sugawara* ISBN 0-19-859385-6

[5] ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

Entrainements Electriques II Auteur: Dr Nicolas Wavre