SCHÉMAS MÉCANIQUE STATISTIQUE

Nicolas CHIREUX

29 août 2014

SCHÉMAS MÉCANIQUE STATISTIQUE

Chapitre 1

Statique des fluides

1.1 Pression

1.2 Equilibre mécanique d'un fluide

1.2.1 Relation fondamentale

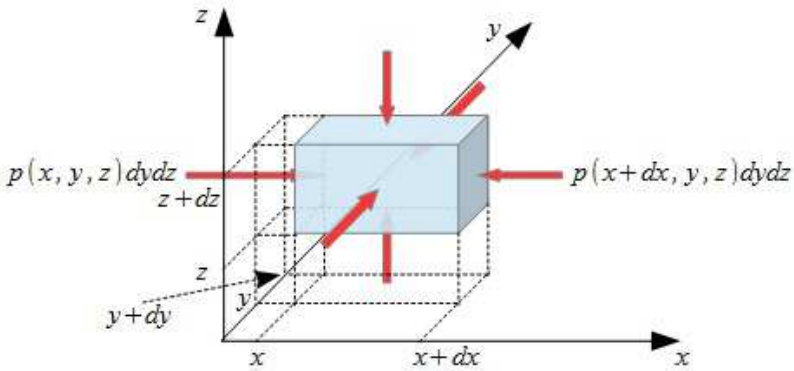
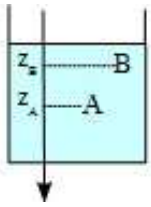


FIGURE 1.1 – Bilan des forces sur un élément de volume de fluide $dxdydz$ soumis à un champ de forces volumiques $\vec{f_v}$

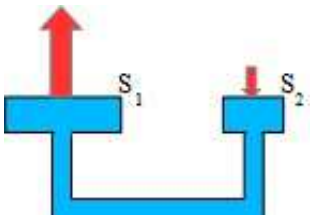
1.2.2 Cas d'un fluide incompressible au repos dans le champ de pesanteur



En projetant $\overrightarrow{grad}p = \mu\vec{g}$ sur z, nous obtenons immédiatement

$$p_A - p_B = \mu g(z_A - z_B) \tag{1.1}$$

1.2.3 Théorème de Pascal

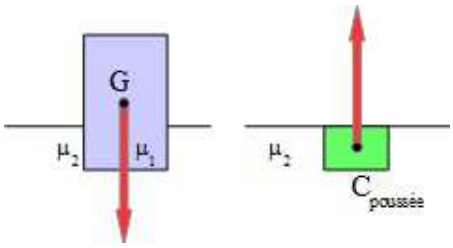


Si on exerce une force F_2 sur la surface S_2, on subit en S_1 une force F_1 bien plus importante. En effet comme $p_1 = p_2$ (surfaces au même niveau), on a $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ et donc

$$F_1 = \frac{S_1}{S_2}F_2 \tag{1.2}$$

Si $S_1 \gg S_2$ alors $F_1 \gg F_2$

1.2.4 Poussée d'Archimède



Le théorème d'Archimède est une autre conséquence de la loi fondamentale de l'hydrostatique :
tout corps plongé dans un fluide un équilibre reçoit de celui-ci une poussée de bas en haut égale en valeur absolue au poids de fluide déplacé, cette poussée s'exerçant au centre de masse du fluide déplacé appelé centre de poussée.

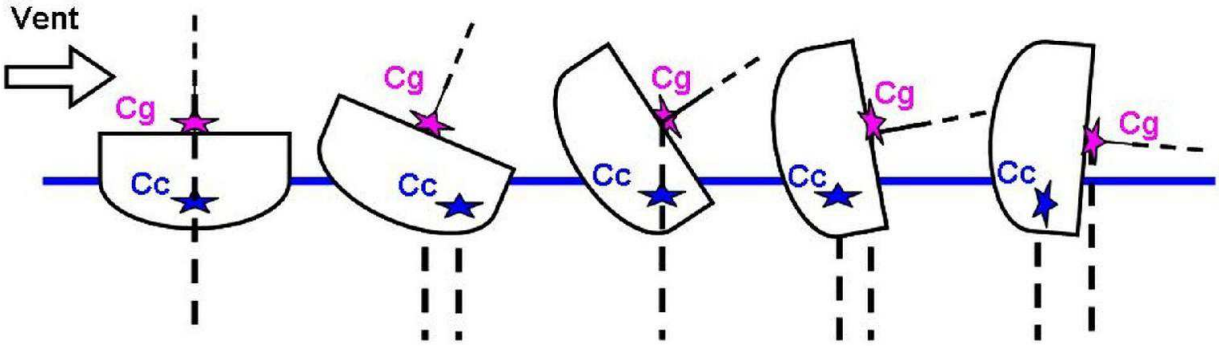


FIGURE 1.2 – Effet d'un coup de vent latéral sur un bateau dont le centre de gravité est trop haut

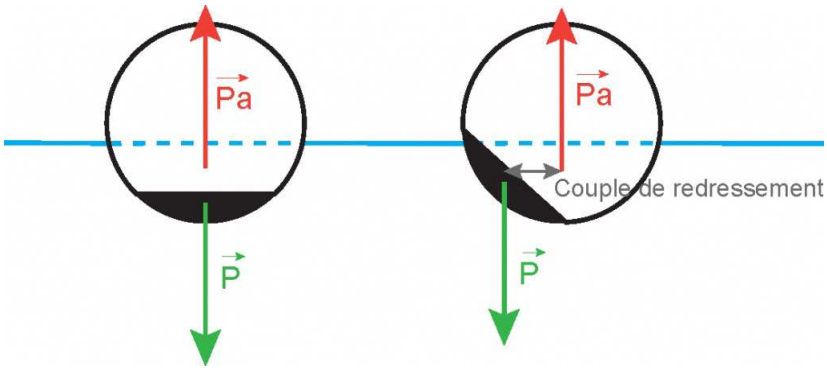
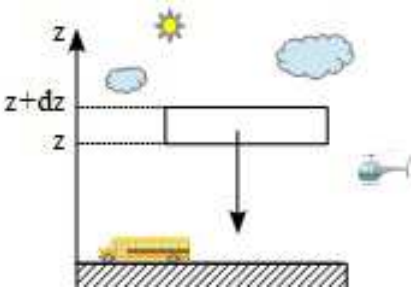


FIGURE 1.3 – Abaissement du centre de gravité d'un bateau afin d'éviter le chavirement

1.2.5 Cas d'un fluide compressible - Equilibre isotherme de l'atmosphère



Considérons une tranche d'atmosphère de surface S et d'épaisseur dz considérée comme un gaz parfait. Elle est en équilibre sous l'effet d'une part de son poids $d\vec{P} = -\mu g S dz \vec{e_z}$ et d'autre part des forces de pression exercées sur sa face inférieure $p(z)Sdz\vec{e_z}$ et sur sa face supérieure $-p(z+dz)Sdz\vec{e_z}$.

Chapitre 2

Eléments de thermodynamique statistique

2.1 Systèmes à spectre discret d'énergie

2.1.1 Fonction de partition

2.1.2 Energie moyenne d'une particule

2.1.3 Ecart quadratique énergétique pour une particule

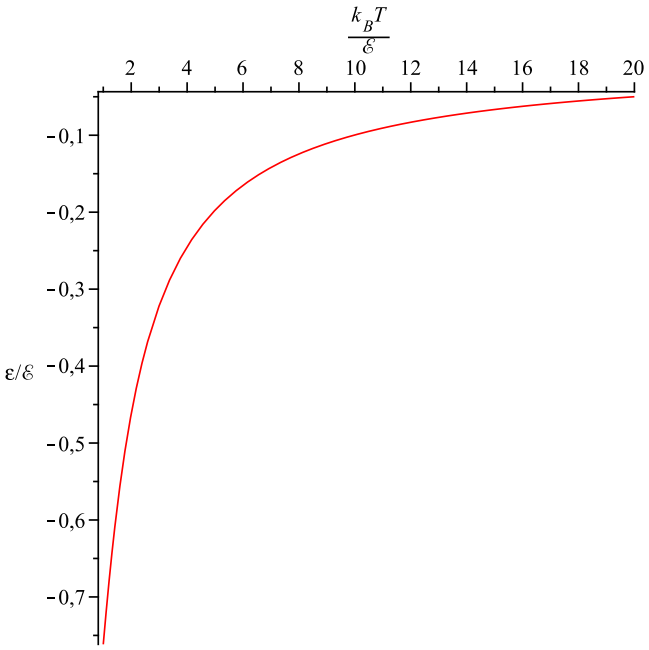
2.1.4 Système de N particules - Limite thermodynamique

2.1.5 Capacité thermique à volume constant d'un système

2.1.6 Systèmes à deux niveaux - Exemple du paramagnétisme de Brillouin

Calcul des probabilités associées à chaque niveau d'énergie

Energie moyenne

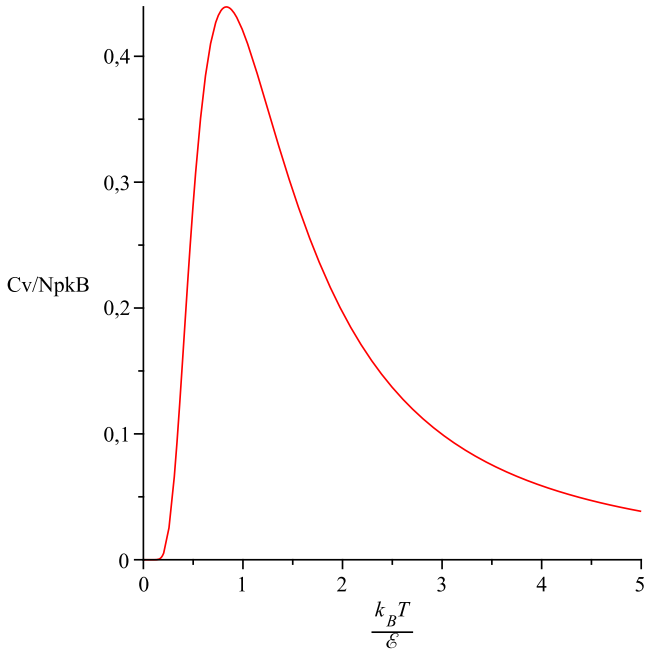


A faible température, seul le fondamental est accessible donc $\frac{\bar{\epsilon}}{\mathcal{E}} \to -1$

A haute température, il y a occupation des deux états de manière équiprobable donc $\frac{\bar{\epsilon}}{\mathcal{E}} \to 0$

FIGURE 2.1 – Tracé de $\frac{\bar{\epsilon}}{\mathcal{E}}$ en fonction de $\frac{k_B T}{\mathcal{E}}$

Capacité thermique à volume constant



A faible température, seul le fondamental est accessible donc même si on augmente un peu la température, l'énergie du système varie peu et $C_v \simeq 0$

A haute température, il y a occupation des deux états de manière équiprobable donc même si on fait varier un peu la température, l'énergie du système varie peu et $C_v \simeq 0$

Par contre pour une température T telle que $\mathcal{E} \simeq k_B T$, une petite augmentation de température va faire basculer un certain nombre d'atomes du fondamental à l'état excité : le système stocke de l'énergie et sa capacité thermique est non nulle.

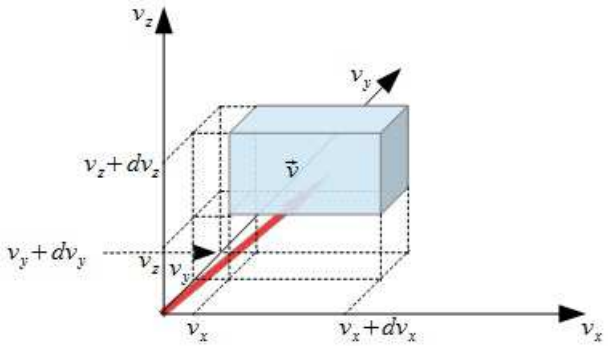
FIGURE 2.2 – Tracé de $\frac{C_v}{N_p k_B}$ en fonction de $\frac{k_B T}{\mathcal{E}}$

Théorème fluctuation - dissipation

2.2 Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

2.2.1 Thermodynamique statistique des gaz parfaits

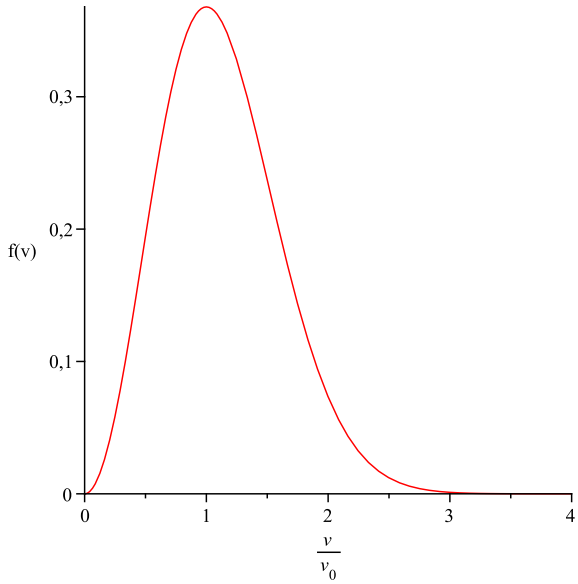
Distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann



La probabilité pour qu'une particule ait l'extrémité de son vecteur vitesse dans un parallélépipède de côtés $v_x \leftrightarrow v_x + dv_x$, $v_y \leftrightarrow v_y + dv_y$, $v_z \leftrightarrow v_z + dv_z$ est donnée par le facteur de Boltzmann en considérant que l'énergie des particules vaut $E = E_c + E_p \simeq E_c = \frac{1}{2}mv^2$ soit

$$d\mathcal{P} = Ae^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \qquad (2.1)$$

Vitesse la plus probable - Vitesse moyenne - Vitesse quadratique moyenne



L'allure de la fonction $f(v)$ est tracée ci-contre. On peut noter qu'à température donnée, les vitesses très faibles ou très élevées sont improbables.

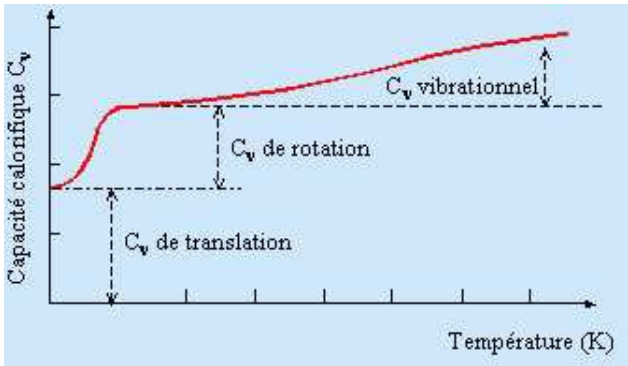
La vitesse la plus probable est obtenue quand $f^{'}(v) = 0$ soit pour $v_0 = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.

La vitesse moyenne est donnée en considérant que $\alpha = \frac{m}{2k_BT}$ par

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v d\mathcal{P} = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} 4\pi I_3 = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \tag{2.2}$$

Théorème d'équipartition de l'énergie

2.2.2 Capacité thermique d'un gaz parfait



En fait si $T < T_{rot} \simeq 60K$ tout se passe comme si l'énergie des degrés de liberté de rotation n'étaient pas pris en compte : c'est le gel des degrés de liberté de rotation. En fait la description classique est en échec. L'énergie des degrés de libertés de rotation est quantifiée. A basse température, les molécules sont bloquées au niveau fondamental car l'agitation thermique n'est pas suffisante pour permettre la transition au premier niveau excité : le degré de liberté n'en est pas un et il est gelé. La capacité thermique à volume constant vaut alors $3/2R$ comme pour un gaz parfait monoatomique.