

## EPREUVE COMMUNE DE TIPE 2008 - Partie D

### Titre : Principe variationnel et lois de la nature

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

#### **GUIDE POUR LE CANDIDAT :**

Le dossier ci-joint comporte 11 pages de texte et cinq figures.

Document principal : **Principe variationnel et lois de la nature.**

#### **Travail demandé au candidat :**

Le candidat pourra librement choisir sa présentation orale. En particulier, s'il le désire, il pourra choisir d'insister soit sur la partie mécanique soit sur la partie optique géométrique. Cependant, l'ensemble du texte devra être lu et pourra faire l'objet de questions.

Quelques pistes sont suggérées au candidat :

- Présenter le texte sous un angle physique en insistant sur le sens physique des notions introduites. Dans ce cas, il est recommandé de commenter les exemples physiques donnés dans le texte.
- Présenter le texte sous un angle mathématique en insistant sur la compréhension mathématique des équations. Dans ce cas, il est recommandé de refaire le plus possible de démonstrations.
- Mettre en relief le sens physique d'un principe variationnel. Comparer l'approche de la mécanique et de l'optique géométrique.
- Prendre en considération les trois points précédents.

#### **CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :**

★ Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

★ Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.

- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé.

- A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

# Principe variationnel et lois de la nature

... applications en mécanique classique et en optique géométrique

## 1 Introduction

Quels que soient les phénomènes étudiés, la modélisation en physique fait toujours appel à un cadre formel régi par des principes pouvant se définir comme l'équivalent des postulats en mathématiques. Les principes ne se démontrent pas. Ils sont issus de constatations expérimentales qui les valident unanimement. Ils sont abandonnés lorsqu'un ou plusieurs phénomènes observés les mettent en défaut. Par exemple, la constance de la vitesse de la lumière est un fait expérimental qui n'est pas compatible avec les postulats de la cinématique classique. Il l'est en revanche avec ceux de la cinématique relativiste.

Un des problèmes les plus difficiles de la physique théorique est celui de l'optimisation du cadre formel dans lequel les principes s'écrivent. En effet, il est nécessaire de faire la distinction entre ce qui doit être considéré comme un principe (postulat) et ce qui doit être considéré comme une propriété pouvant être déduite (théorème). Idéalement le cadre formel doit être également suffisamment souple pour s'adapter à une possible généralisation ou réécriture lorsque l'évolution des idées ou des techniques expérimentales mettent en évidence la nécessité de le réadapter. Le problème s'est posé par exemple au début du vingtième siècle où de nouveaux résultats expérimentaux tels que l'expérience de Michelson et Morley, l'effet photoélectrique, la discrétisation des spectres atomiques, la courbe d'émission du corps noir etc ... n'ont pu trouver d'explication satisfaisante dans le cadre de la physique de cette époque<sup>1</sup>. De nouveaux cadres conceptuels se sont alors mis en place entre 1900 et 1925. Ils portent les noms de relativité et de mécanique quantique. Dans ce contexte, il apparaît par exemple que, dans la limite des faibles vitesses, les descriptions classique et relativiste du mouvement d'un objet sont équivalentes.

La manière d'énoncer les principes est aussi très importante. C'est à cet aspect que nous nous intéressons dans ce texte en considérant deux cas particuliers empruntés à la mécanique classique et à l'optique géométrique. En introduisant pour chacune de ces matières l'énoncé d'un principe variationnel, ou dit de manière plus restrictive d'un principe de moindre action, nous verrons qu'il est possible de retrouver d'une part, l'un des piliers de la mécanique newtonienne qu'est le Principe Fondamental de la Dynamique<sup>2</sup> (PFD) et d'autre part, les lois de la réflexion et de la réfraction qui sont à la base de toute étude impliquant un rayon

---

<sup>1</sup>Cette physique est traditionnellement désignée comme *la physique classique*. C'est l'ensemble des théories qui rendent compte des phénomènes où les effets relativistes et quantiques sont négligeables. On y inclut la mécanique newtonienne et la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.

<sup>2</sup>Afin qu'il n'y ait aucune ambiguïté, nous désignons par PFD dans ce texte, la loi de Newton qui pour un point matériel de masse  $m$  soumis à une résultante de forces notée  $\vec{F}$ , stipule que:  $\vec{F} = m\vec{a}$ , où  $\vec{a}$  désigne son accélération dans un référentiel galiléen.

lumineux en optique géométrique. Concernant la partie dédiée à la mécanique, nous montrerons qu'il est également possible d'introduire un énoncé du principe variationnel encore plus général permettant de caractériser les invariants d'un système mécanique. Bien que nous ne développerons pas ces aspects dans ce texte<sup>3</sup>, il est important de souligner que ces analogies de formalisme peuvent être exploitées pour déduire des propriétés formellement similaires entre la mécanique et l'optique géométrique. Par ailleurs, la description de la mécanique à travers une approche variationnelle permet une généralisation du formalisme à la théorie quantique des champs qui décrit la physique des particules contemporaine et qui n'aurait pas pu se faire aussi aisément avec la seule mécanique newtonienne.

## 2 Principe variationnel et mécanique classique

### 2.1 Principe variationnel de Hamilton - Equations d'Euler-Lagrange

Dans cette section, nous allons voir qu'il est possible de retrouver le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) de la mécanique classique newtonienne à partir de l'énoncé d'un principe variationnel dit de Hamilton. Nous supposons ici que le système physique est un ensemble de  $N$  points matériels en mouvement dans un référentiel galiléen. Nous supposons également que les seules forces agissant sur le système sont conservatives, c'est à dire dérivant d'une énergie potentielle (Annexe A). Nous notons  $q_i$ , les  $3N$  variables indépendantes<sup>4</sup> caractérisant la position de ces  $N$  points à l'instant  $t$ . La notation  $q_i(t)$  est utilisée pour insister sur la dépendance temporelle de la coordonnée. La notation  $\dot{q}_i$  (ou  $\dot{q}_i(t)$ ) désigne la dérivée première temporelle de la coordonnée  $q_i$ .

On appelle *espace de configuration*, l'espace à  $3N$  dimensions tel que la position du système physique soit caractérisée par un point de coordonnées  $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{3N}\}$  de cet espace. Nous allons maintenant introduire une fonction des  $3N$  couples  $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  et éventuellement explicitement du temps  $t$  appelée *Lagrangien*, notée  $L$  et définie par

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = E_c(\dot{q}_i) - E_p(q_i, t), \quad (1)$$

où  $E_c$  désigne l'énergie cinétique totale du système à  $N$  particules et  $E_p$ , l'énergie potentielle totale<sup>5</sup>. La dimension physique du Lagrangien est celle de l'énergie. Quelques exemples concrets sont traités explicitement dans l'Annexe B. Il doit être clair que si l'on se place à un instant  $t$  donné pour lequel les couples  $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  sont définis, le Lagrangien est toujours calculable numériquement. A partir du Lagrangien, il est possible de définir une expression mathématique, appelée *action*, notée  $S$  et définie par

$$S(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt, \quad (2)$$

---

<sup>3</sup>Aspects hors programme du concours

<sup>4</sup>Il est conseillé dans un premier temps de penser aux  $3N$  coordonnées cartésiennes  $\{x_j, y_j, z_j\}$  repérant la position de ces  $N$  points. Ceci est néanmoins beaucoup trop restrictif lorsque l'on aborde le cadre général de ce formalisme mais suffisant pour celui de ce texte.

<sup>5</sup>Notons que ce n'est pas l'expression la plus générale d'un Lagrangien. Elle est néanmoins suffisante dans le cadre de ce texte.

où l'intégrale est prise entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  sur un trajet de l'espace de configuration désigné ici par  $C$ . Nous n'abordons pas dans ce texte le problème de l'existence de cette intégrale, l'important étant de bien comprendre que la donnée de  $C$  est nécessaire et suffisante à la détermination de  $S(C)$ . Il est également important de comprendre, qu'à priori, entre les deux instants considérés, il y a une infinité de chemins  $C$  possibles dans l'espace des configurations. La mécanique newtonienne nous apprend cependant que la trajectoire explicitement suivie par le système physique est unique lorsque les conditions initiales sont fixées. Nous allons voir qu'un principe variationnel fondé sur la recherche d'un extremum de l'action va nous conduire à la même conclusion<sup>6</sup>. Pour cela, nous évaluons la différence au premier ordre entre la valeur de l'action obtenue sur un chemin  $C$  et sur un chemin très proche  $C + \delta C$ , n'en différant que par des infiniments petits du premier ordre et de mêmes extrémités (Figure 1).

$$\delta S = S(C + \delta C) - S(C) \quad (3)$$

A partir de maintenant, l'indice 'prime' est associé aux coordonnées sur le chemin  $C + \delta C$ . Posons

$$\delta_0 q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t) \quad (4)$$

L'accroissement  $\delta_0 q_i(t)$  est un infiniment petit du premier ordre. L'hypothèse de "mêmes extrémités" implique :  $\delta_0 q_i(t_1) = \delta_0 q_i(t_2) = 0$ . Pour les coordonnées  $\dot{q}_i$ , nous avons

$$\delta_0 \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta_0 q_i(t) \quad (5)$$

En effectuant explicitement le calcul de (3) au premier ordre, il vient<sup>7</sup>

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(q'_i(t), \dot{q}'_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \right] dt \quad (6)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 \dot{q}_i \right] dt. \quad (7)$$

En intégrant par partie la dernière équation et en tenant compte des conditions aux extrémités imposées dans ce calcul, on obtient :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta_0 q_i dt. \quad (8)$$

Si nous cherchons maintenant le chemin  $C$  vérifiant  $\delta S = 0$  ou, autrement dit, le chemin qui rend l'action stationnaire, nous obtenons pour chaque coordonnée  $q_i$  l'équation suivante

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (9)$$

Les  $3N$  équations ainsi obtenues s'appellent les *équations d'Euler-Lagrange*. Nous allons maintenant voir que ces équations sont en fait équivalentes à celles obtenues en utilisant le PFD. Pour cela, nous allons raisonner sur les coordonnées cartésiennes. Dans ce cas, chacun des  $N$  points matériels que nous labellons avec l'indice  $j$  possède 3 coordonnées spatiales

<sup>6</sup>Des explications complémentaires sont données en Annexe C.

<sup>7</sup>Il est conseillé de se référer à l'Annexe C pour bien comprendre le passage de l'équation (6) à (7).

$(x_j, y_j, z_j)$  pour repérer sa position et 3 coordonnées  $(\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j)$  pour repérer sa vitesse. Pour un système à  $N$  points matériels, l'énergie cinétique se calcule facilement, et on obtient :

$$E_c = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2), \quad (10)$$

où  $m_j$  désigne la masse du point  $j$ . L'énergie potentielle totale  $E_p$  ne dépend pas des vitesses. Elle ne dépend que des coordonnées des  $N$  points matériels. On a

$$E_p = E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_j, y_j, z_j, \dots, x_{3N}, y_{3N}, z_{3N}). \quad (11)$$

Le Lagrangien s'écrit donc

$$L = \left( \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \right) - E_p. \quad (12)$$

Le calcul explicite des équations d'Euler-Lagrange<sup>8</sup> conduisent aux équations suivantes pour le point matériel d'indice  $j$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} E_p = m_j \frac{d^2}{dt^2} x_j \quad (13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} E_p = m_j \frac{d^2}{dt^2} y_j \quad (14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_j} E_p = m_j \frac{d^2}{dt^2} z_j \quad (15)$$

Dans l'hypothèse de forces conservatives, le terme de gauche correspond à  $\vec{F}_j = -\vec{grad}_j(E_p)$  où  $\vec{F}_j$  représente la résultante des forces appliquées sur le point  $j$  (Annexe A). La notation  $\vec{grad}_j(E_p)$  signifie que l'on considère le gradient défini par rapport aux trois coordonnées du point  $j$ . Le terme de droite correspond à l'accélération du point  $j$ . Nous retrouvons ainsi l'expression du PFD appliqué au point  $j$ . Pour obtenir la trajectoire, il suffit de connaître les conditions initiales sur la position et la vitesse. Nous pouvons donc retrouver la loi de Newton à partir d'un principe variationnel énoncé de la manière suivante :

*Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , le mouvement du système matériel est celui qui réalise une valeur stationnaire de l'action  $S$ .*

Le fait que ce soit une valeur stationnaire implique que la trajectoire physique peut correspondre à une valeur maximale ou minimale de  $S$ . Nous admettons ici que sur toute partie suffisamment petite de la trajectoire, l'action est toujours minimale. C'est pour cela que le principe que nous venons d'énoncer s'appelle également le *principe de moindre action* dont nous allons voir, dans la section 3, un analogue en optique géométrique connu sous le nom de *principe de Fermat*.

## 2.2 Principe variationnel de Weiss - Théorème de Noether

Le principe variationnel précédent nous a permis de retrouver les équations du PFD

---

<sup>8</sup>Dans ce calcul, il est important de comprendre que les coordonnées  $q_i$  et  $\dot{q}_i$  sont des variables indépendantes et se traitent comme telles.

de Newton. Nous pouvons cependant nous poser la question s'il est possible de trouver une forme plus générale incluant à la fois ce résultat fondamental et des informations supplémentaires susceptibles d'enrichir notre compréhension du système physique étudié.

Pour cela, nous allons donc élargir le calcul de la variation première de l'action en permettant des variations non nulles aux limites du domaine d'intégration. Considérons l'application infinitésimale :  $t \rightarrow t' = t + \epsilon(t)$  dans laquelle, l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  se transforme en l'intervalle  $[t'_1, t'_2]$ . La fonction  $\epsilon(t)$  est à priori quelconque et ne dépend que du temps. Sur ce nouvel intervalle de temps, on considère un chemin  $C'$  proche de  $C$  (Figure 2) tel que

$$q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) = q'_i(t + \epsilon(t)). \quad (16)$$

Avec ces nouvelles hypothèses, la variation première de l'action prend alors la forme suivante

$$\delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q'_i(t'), \dot{q}'_i(t'), t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (17)$$

Après un calcul assez fastidieux, on démontre que l'égalité précédente peut se mettre sous la forme<sup>9</sup>

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(q'_i(t), \dot{q}'_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)] dt - \epsilon(t_1)L(t_1) + \epsilon(t_2)L(t_2) \quad (18)$$

En introduisant les notations suivantes

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (19)$$

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \dot{q}_i - L, \quad (20)$$

où  $p_i$  s'appelle : *le moment conjugué de  $q_i$*  et  $\tilde{L}$  *le Lagrangien adjoint ou le Hamiltonien*<sup>10</sup>. L'égalité précédente peut alors se mettre sous la forme<sup>11</sup>

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta_0 q_i dt + \left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (21)$$

Nous pouvons tout de suite remarquer que le premier terme du membre de droite correspond exactement à celui de l'équation (8) qui conduit aux équations d'Euler-Lagrange. Cette deuxième version du principe variationnel apparaît donc inutilement compliquée voir incorrecte puisqu'elle fait apparaître un terme supplémentaire dans un formalisme où l'objectif de retrouver les lois de Newton est déjà atteint. En réalité, nous allons voir que cette nouvelle écriture est très intéressante car elle permet non seulement de garder le résultat majeur concernant les équations du mouvement mais aussi d'associer des lois de conservation caractéristiques aux variations des  $q_i$  qui laissent l'action  $S$  du système physique étudié

---

<sup>9</sup>Résultat à admettre

<sup>10</sup>Des explications sur le sens physique des variables  $p_i$  et  $\tilde{L}$  sont données en Annexe D.

<sup>11</sup>Résultat à admettre

invariante.

Si nous exigeons de la même façon que l'action  $S$  soit stationnaire,  $\delta S = 0$ , le membre de droite de (21) doit être identiquement nul. En réécrivant le terme aux limites comme l'intégrale de la dérivée temporelle de la quantité entre crochets, nous obtenons

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta_0 q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right] dt \quad (22)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta_0 q_i + \frac{d}{dt} \left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right] \right) dt \quad (23)$$

Il apparaît donc que certaines combinaisons des équations du mouvement se réduisent à une dérivée totale nulle par rapport au temps. Ces identités, appelées identités de Noether<sup>12</sup>, s'écrivent sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta_0 q_i = -\frac{d}{dt} \left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right]. \quad (24)$$

Ceci implique que le long de la trajectoire classique où les  $q_i$  doivent vérifier les équations d'Euler-Lagrange, nous avons

$$\frac{d}{dt} \left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right] = 0. \quad (25)$$

La quantité :  $\left[ -\tilde{L}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \delta q_i \right]$  est donc constante dans le mouvement du système physique, autrement dit il s'agit d'une constante du mouvement. Ce résultat est une expression possible du théorème de Noether que nous n'énonçons pas ici dans toute sa généralité et qui constitue un outil majeur de la physique fondamentale contemporaine.

*Regardons quelques applications possibles :*

1) Supposons que l'action du système physique soit invariante sous toutes les translations de temps:  $\epsilon(t) = \epsilon$  où  $\epsilon$  est un réel. Nous avons alors  $\delta q_i = 0$ . D'après l'équation (25), nous avons

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = 0. \quad (26)$$

Le Hamiltonien qui caractérise ici l'énergie du système est donc constant dans le temps. Un système physique dont l'action est invariante pour toute translation temporelle conserve donc son énergie.

2) Supposons que l'action du système physique soit invariante sous toutes les translations spatiales:  $\epsilon(t) = 0$  et pour tous les  $j$  :  $\delta_0 \vec{r}_j = \vec{a}$  où  $\vec{r}_j$  désigne le vecteur position du point  $j$  et  $\vec{a}$  le vecteur translation. En se servant des coordonnées cartésiennes, nous avons d'après (25)

---

<sup>12</sup>Née le 23 mars 1882 à Erlangen, Emmy Noether est très certainement un des plus grands génies des mathématiques du vingtième siècle. Ses travaux mettant en relation les symétries en physique et les principes de conservation ont fait l'admiration de tous, notamment d'Albert Einstein. Elle n'a jamais obtenu un poste à la mesure de son talent pour l'unique raison qu'elle était une femme. Bien que ses travaux soient toujours au centre de la physique contemporaine, sa notoriété reste faible sans doute pour la même raison.

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{i=N} \vec{p}_j \cdot \delta \vec{r}_j \right) = 0 \quad (27)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{i=N} \vec{p}_j \right) = 0 \quad (28)$$

L'impulsion totale est donc constante dans le temps.

3) On admettra ici que l'invariance de l'action du système physique sous toutes rotations spatiales entraîne que le moment angulaire total est constant dans le temps.

Dans tout ces raisonnements, il est important de remarquer que l'on considère toujours l'action du système physique et une de ses propriétés d'être ou ne pas être invariante pour un ensemble de transformations données. Autrement dit, c'est bien sûr la physique du système qui détermine ses propriétés d'invariance.

Dans cette sous-section, nous avons donc vu que la généralisation du principe d'Hamilton induisait un formalisme beaucoup plus riche. Par ailleurs, la façon de construire des constantes dans le mouvement à partir de l'action se généralise très bien au formalisme beaucoup plus complexe de la théorie quantique des champs.

## 3 Principe variationnel et optique géométrique

### 3.1 Principe de Fermat

L'étude de l'optique géométrique ou optique des rayons lumineux peut s'aborder de différentes manières. Une première approche consiste à énoncer un ensemble de lois et de s'y référer lorsqu'un problème concret se présente. Ces lois portent le nom de : la loi de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu d'indice optique  $n$  homogène, le principe du retour inverse et les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell (1621) et Descartes(1637). Une seconde approche consiste à prendre comme point de départ l'énoncé du principe variationnel dû au mathématicien français P. de Fermat en 1637 qui postule que

*Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point  $A_1$  à un point  $A_2$  est celui qui correspond à une valeur stationnaire du chemin optique<sup>13</sup> par rapport aux chemins fictifs voisins allant de  $A_1$  à  $A_2$ .*

Dans cet énoncé, le mot stationnaire contient la possibilité d'un chemin optique de longueur minimale et de longueur maximale. Le plus intuitif est bien sûr celui qui correspond à un chemin optique de longueur minimale. Ceci correspond d'ailleurs à l'idée originelle de Fermat. Nous admettons ici que lorsque les points sont suffisamment voisins, le chemin optique suivi explicitement par la lumière est le plus court. On retrouve alors l'idée d'un principe de moindre action.

---

<sup>13</sup>Dans un milieu caractérisé par un indice optique pouvant à priori varier en fonctions du point  $M$  de coordonnées  $\{x, y, z\}$  considéré,  $n = n(x, y, z)$ , le chemin optique allant de  $A_1$  à  $A_2$ , noté  $L_{A_1 A_2}$ , sur une courbe  $C$  appartenant à ce milieu et joignant ces deux points se définit par l'intégrale curviligne :  $L_{A_1 A_2} = \int_C n \, dl$  où  $dl$  est un élément infinitésimal d'arc de  $C$ .



L'approche variationnelle est bien sûr plus abstraite et surtout moins intuitive en première lecture puisqu'elle ne contient aucune référence à une quelconque approche expérimentale. On peut cependant démontrer que toutes les lois énoncées au début de cette sous-section peuvent s'en déduire. Il est par exemple immédiat que la lumière doit se propager selon une ligne droite dans un milieu d'indice optique constant si on admet le principe de Fermat. Dans la prochaine sous-section nous nous proposons de retrouver la loi de la réfraction.

### 3.2 Loi de la réfraction

La situation physique décrite ici se réfère à la Figure 4. Considérons un dioptré plan contenu dans le plan  $Oyz$  séparant deux milieux homogènes d'indice  $n_1$  (dans la région  $x > 0$ ) et  $n_2$  (dans la région  $x < 0$ ) constants. Soient deux points  $A_1$  et  $A_2$  appartenant respectivement aux milieux (1) et (2) et dont on fixe les coordonnées :  $A_1(x_1, 0, 0)$  et  $A_2(x_2, y_2, 0)$ . On note  $I(0, y, z)$  le point d'incidence du rayon lumineux issue de  $A_1$  et allant vers  $A_2$ . A priori  $I$  peut se situer n'importe où dans le plan  $Oyz$ . On se propose de calculer explicitement les coordonnées de  $I$  en utilisant le principe de Fermat et ainsi déterminer le chemin optique physique suivi explicitement par le rayon lumineux. Il est important de noter que le choix des coordonnées des divers points décrit une situation générale. Calculons le chemin optique entre  $A_1$  et  $A_2$

$$L_{A_1, A_2} = n_1 \|\vec{A_1 I}\| + n_2 \|\vec{I A_2}\| \quad (29)$$

$$= n_1 (x_1^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + n_2 (x_2^2 + (y_2 - y)^2 + z^2)^{1/2} \quad (30)$$

Le trajet emprunté par le rayon lumineux est celui qui rend stationnaire le chemin optique. Ici, les deux variables sont les coordonnées du point  $I(0, y, z)$ . La condition d'extremum du chemin optique revient à demander l'annulation des deux dérivées partielles par rapport à  $y$  et  $z$  (Annexe C).

$$\frac{\partial}{\partial y} L_{A_1, A_2} = n_1 y (x_1^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - n_2 (y_2 - y) (x_2^2 + (y_2 - y)^2 + z^2)^{-1/2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} L_{A_1, A_2} = n_1 z (x_1^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + n_2 z (x_2^2 + (y_2 - y)^2 + z^2)^{-1/2} \quad (32)$$

La condition :  $\frac{\partial}{\partial z} L_{A_1, A_2} = 0$  implique que  $z = 0$ . Le point d'incidence  $I$  est donc sur l'axe  $Oy$  et le rayon réfracté  $IA_2$  est dans le plan  $Oxy$ . De l'équation  $\frac{\partial}{\partial y} L_{A_1, A_2} = 0$  et sachant que  $z = 0$ , on peut déduire que

$$n_1 y (x_1^2 + y^2)^{-1/2} = n_2 (y_2 - y) (x_2^2 + (y_2 - y)^2)^{-1/2} \quad (33)$$

En introduisant les angles de réfractions  $i_1$  et  $i_2$  (Figure 5), on obtient bien la loi de Descartes comme conséquence du principe variationnel

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2). \quad (34)$$

De manière similaire, on peut retrouver la loi de la réflexion.

## Annexe A - Force conservative - Energie potentielle

Lorsqu'une force  $\vec{F}$  s'exerce sur un point matériel  $M$  de masse  $m$ , il arrive fréquemment que le travail élémentaire de cette force puisse se mettre sous la forme :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p, \quad (35)$$

où  $d\vec{r}$  est la différentielle du vecteur position et  $dE_p$  la différentielle d'une fonction appelée énergie potentielle  $E_p$ . De telles forces sont dites conservatives. On a alors la relation

$$\vec{F} = -\vec{grad}(E_p) \quad (36)$$

où  $\vec{grad}(E_p)$  désigne le gradient de la fonction  $E_p$ . En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{grad}(E_p) = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)\vec{k} \quad (37)$$

En présence de telle force, on peut démontrer que l'énergie mécanique du point :  $E_{meca} = E_{cin} + E_p$  reste constante durant le mouvement.

Donnons un exemple avec le cas d'une particule en chute libre dans le champ de la pesanteur  $\vec{g}$  constant et dirigé selon un axe vertical  $Oz$ . Elle subit donc la force  $\vec{F} = m\vec{g}$ . En projetant sur l'axe  $Oz$ , on obtient l'équation :  $F_z = mg = -\frac{dE_p}{dz}$ . On en déduit alors que  $E_p = -mgz + E_0$ , où  $E_0$  est une constante arbitraire. L'énergie mécanique totale s'écrit  $E = 1/2mv^2 - mgz + E_0$ . Elle se conserve durant la chute de la bille.

## Annexe B - Exemples

### E1- Cas d'un oscillateur harmonique unidimensionnel

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  fixé à l'extrémité d'un ressort d'axe  $Ox$  horizontal, de longueur  $x_0$  et de raideur  $k$ . Soit  $x$  la coordonnée de  $M$  le long de cet axe. Dans ces conditions, l'énergie cinétique de  $M$  est égale à  $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  et l'énergie potentielle à  $E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ . Le Lagrangien s'écrit donc :  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ . L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0). \quad (38)$$

En effet,  $x$  et  $\dot{x}$  étant des coordonnées indépendantes,  $\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - x_0)$  et  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ . On retrouve bien l'équation différentielle du PFD.

### E2- Cas de deux oscillateurs en interaction

On considère maintenant le système physique représenté à la Figure 3.  $x_1$  et  $x_2$  représentent les élongations respectives des points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse respective  $m_1$  et  $m_2$  par rapport à leur position d'équilibre. Dans ces conditions, l'énergie cinétique est égale à  $E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$  et l'énergie potentielle à  $E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_{12}(x_1 - x_2)^2$ . Le Lagrangien s'écrit donc :

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k_{12}(x_1 - x_2)^2. \quad (39)$$

Les équations d'Euler-Lagrange conduisent donc à deux équations correspondant aux couples  $(x_1, \dot{x}_1)$  et  $(x_2, \dot{x}_2)$  qui s'écrivent

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \quad (40)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 + k_{12}(x_1 - x_2) \quad (41)$$

Ces équations sont identiques à celles obtenues en utilisant le PFD.

## Annexe C - Extremum d'une fonction à plusieurs variables

Pour avoir une idée intuitive sur le sens mathématique du calcul effectué dans les sections 2 et 3, on peut revenir au cas du développement en série de Taylor d'une fonction  $f$  à une variable  $x$ . Dans ce cas et bien sûr lorsque les conditions nécessaires à l'existence de ce développement sont vérifiées, on peut écrire :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \quad (42)$$

Au premier ordre en  $h$ , on peut donc écrire  $f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$ . La variation calculée au premier ordre de la fonction  $f$  :  $\delta f = f(x+h) - f(x)$  est donc donnée par la dérivée première. Si cette dernière est nulle, on obtient un extremum de  $f$ . C'est l'étude du signe de la dérivée seconde qui statue sur l'existence d'un maximum ou d'un minimum de  $f$ .

L'ensemble du raisonnement peut se généraliser à une fonction de  $N$  variables,  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Pour simplifier l'écriture, on suppose ici que  $N = 2$ . On admet qu'un développement similaire peut s'écrire :

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + O(h_1^2) + O(h_2^2) + O(h_1 h_2) \quad (43)$$

Au premier ordre en  $h_1$  et  $h_2$ , la variation de la fonction  $f$  s'écrit :  $\delta f = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$ . Cette variation est donc nulle lorsque les dérivées partielles premières le sont.

Il est toutefois important de noter que dans la partie mécanique, on impose une variation nulle à l'action et non au Lagrangien, d'où les équations d'Euler-Lagrange alors que dans la partie optique, on impose une variation nulle au chemin optique d'où les deux équations sur les dérivées partielles dans le calcul de la section 3.2.

## Annexe D - Sens physique des $p_i$ et de $\tilde{L}$

En reprenant, les raisonnements développés en coordonnées cartésiennes à la sous-section 2.1, nous voyons que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \quad (44)$$

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{i=3N} p_i \dot{q}_i - L = E_c + E_p \quad (45)$$

où  $E_c$  et  $E_p$  correspondent à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle totale du système à  $N$  points. Le sens physique de  $p_i$  est donc celui d'une quantité de mouvement et celui de  $\tilde{L}$ , de l'énergie mécanique (Annexe A).

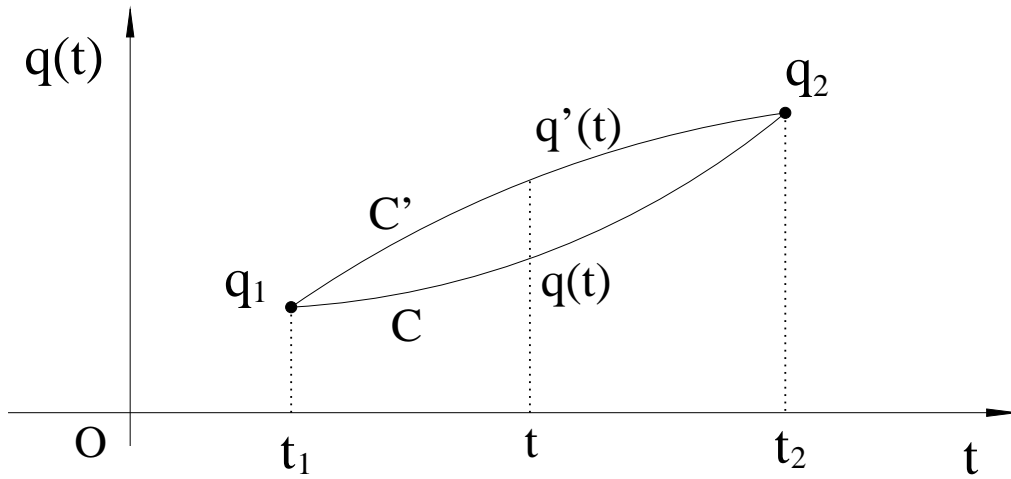


Figure 1. Représentation graphique schématique de l'évolution temporelle d'une coordonnée  $q_i$  en fonction du temps dans le cadre du principe variationnel de Hamilton. Ici  $q_1$  et  $q_2$  signifient  $q(t_1)$  et  $q(t_2)$ , respectivement.

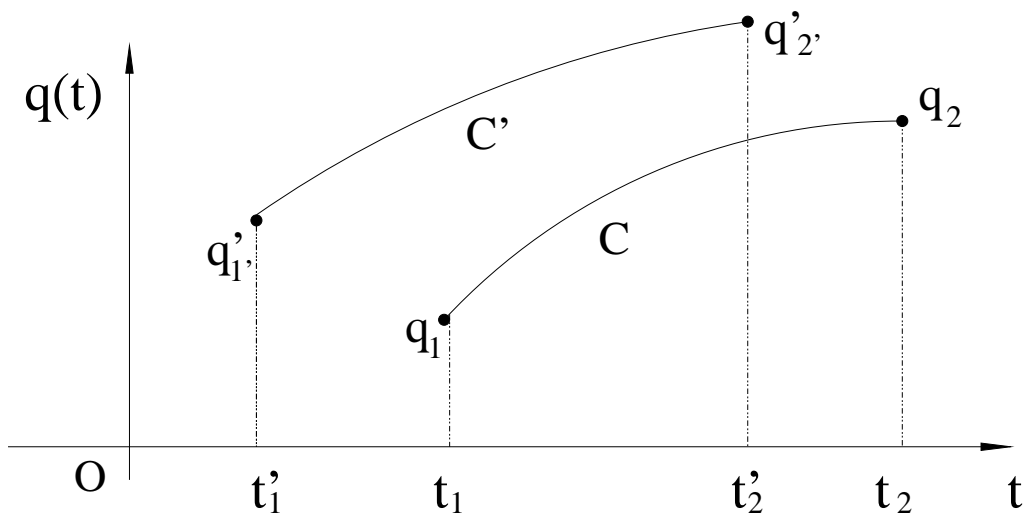


Figure 2. Représentation graphique schématique de l'évolution temporelle d'une coordonnée  $q_i$  en fonction du temps dans le cadre du principe variationnel de Weiss.

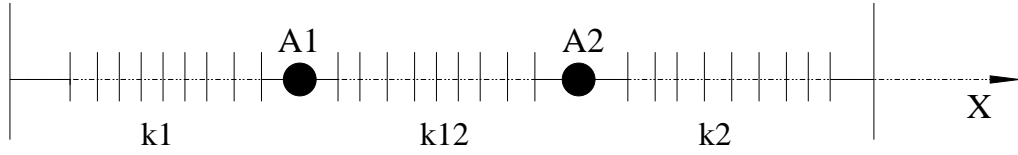


Figure 3. Représentation graphique du système de trois ressorts (Annexe B).

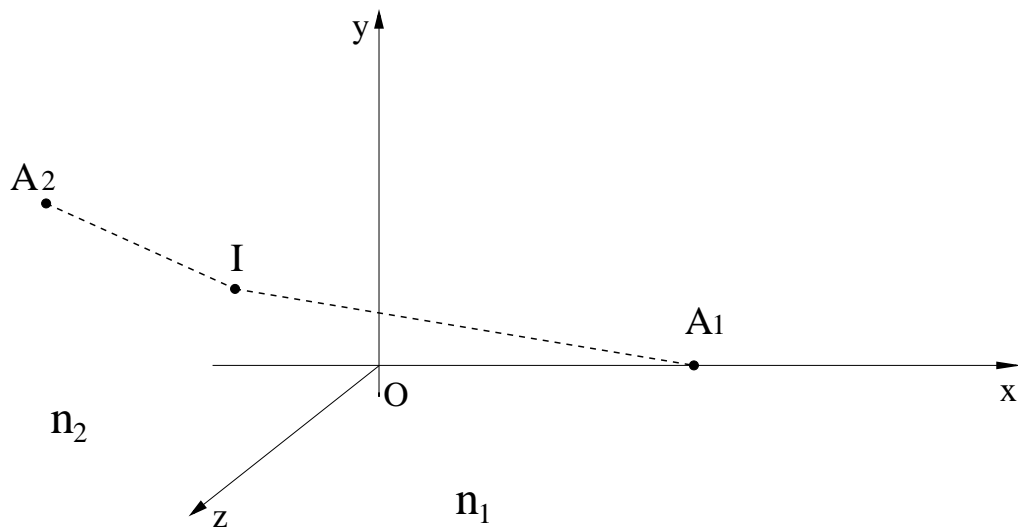


Figure 4. Représentation graphique du choix des coordonnées effectué à la section 3.2.

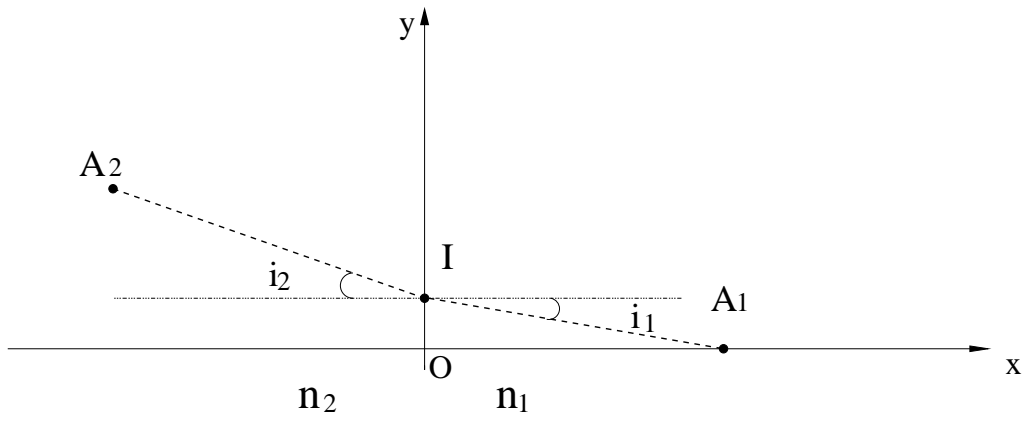


Figure 5. Angles d'incidences.