

## ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2014 - Partie D

### Transport aléatoire : équation de la chaleur, marches aléatoire et mouvement Brownien

Temps de préparation : ..... 2 h 15 minutes

Temps de présentation devant les examinateurs : ..... 10 minutes

Dialogue avec les examinateurs : ..... 10 minutes

#### GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 17 pages

Guide candidat : 1 page

Document principal : 15 pages

Documents complémentaires : 0 page

Travail suggéré au candidat :

Le candidat pourra faire un résumé du document en mettant en avant les liens entre aspects déterministes et probabilistes de la température et de la chaleur. Il pourra par la suite aborder la structure (hypothèses, conséquences, approximations) de la marche aléatoire symétrique discrète et de sa version continue. Enfin, l'exemple du mouvement Brownien dans le cas des mathématiques financières pourra illustrer une application du calcul stochastique, à moins que le candidat n'ait lui-même, à travers sa culture ou sa réflexion, un autre exemple sur la base duquel il pourra argumenter de l'utilité du calcul stochastique pour modéliser et comprendre les phénomènes aléatoires.

#### CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :

- \* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
- \* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.
- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper... mais l'ensemble du document sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt à débiter votre exposé.

**Il est interdit de sortir le dossier du site de l'épreuve.**

**A l'issue de l'épreuve, vous devez remettre au jury le dossier scientifique.**

**Tout ce que vous aurez présenté au jury pourra être retenu en vue de sa destruction.**



# 1. Thermodynamique et équation de la chaleur

## 1.1 Introduction et motivation

La thermodynamique peut être définie de différentes façons. L'une de ses définitions concerne les propriétés des systèmes macroscopiques à l'équilibre, c'est à dire, comment une très grande  
5 assemblée de constituants s'organise à notre échelle étant données des conditions de température, de pression et de volume. Plus précisément, il s'agit de comprendre comment se manifestent à l'échelle macroscopique les comportements et mouvements collectifs des constituants microscopiques, qui sont régis par leurs statistiques individuelles : ces constituants se déplacent, s'entrechoquent, subissent le champ de gravitation, le champ électromagnétique, etc. D'une façon générale, il s'agit de considérations énergétiques. S'il fallait analyser le mot lui même, nous  
10 dirions thermo-dynamique. - thermo-, ou chaleur, est associé à « l'énergie en transit », alors que -dynamique- est associée à « mouvement ». Ainsi, la thermodynamique peut être vue comme l'étude du déplacement de l'énergie et comment l'énergie amène aux déplacements.

Du point de vue historique, la thermodynamique trouve son origine dans la nécessité d'améliorer l'efficacité des premières machines à vapeur. La première moitié du dix neuvième siècle,  
15 sous l'impulsion notamment des travaux de Rudolf Clausius et William Thomson, voit ce domaine se formaliser de plus en plus, jusqu'à l'introduction de lois et de concepts de plus en plus précis au cours de la seconde moitié de ce siècle, avec notamment les contributions de Josiah Willard Gibbs, Johannes Diderik van der Waals ou Ludwig Boltzmann, pour n'en citer  
20 que quelques uns.

L'objectif de ce document est de montrer le lien qui existe entre la chaleur et sa propagation dans un milieu continu macroscopique, et une description plus microscopique qui est celle du marcheur aléatoire, concept fondamentalement statistique. Ce lien n'a rien d'accidentel. Au contraire, il amorce une description profondément microscopique des phénomènes de transport  
25 d'énergie, montre en filigrane comment des méthodes probabilistes et déterministes sont liées, par exemple dans le cadre de la résolution d'équations aux dérivées partielles, et autorise des associations conceptuelles qui nous impactent dans la vie de tous les jours, comme la modélisation des fluctuations des cours dans les marchés financiers.

## 1.2 Fourier et l'équation de la chaleur

### 30 1.2.1 La loi de Fourier

A l'aube du dix neuvième siècle, alors que la thermodynamique et sa formulation sont nées, Jean Baptiste Joseph Fourier conduit à Grenoble des expériences sur la propagation de la chaleur. Ses travaux le conduisent à établir expérimentalement la loi de Fourier, qui stipule que s'il existe une différence locale de température dans un matériau, un « courant » va s'établir

35 en son sein pour équilibrer cette différence de température et que ce courant va par conséquent transférer de la chaleur. Formellement, cette loi s'écrit :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) = -\lambda \overrightarrow{\nabla}(T) \quad (1)$$

où  $\vec{j}_Q$  est le vecteur densité de flux de chaleur,  $\lambda$  le coefficient de conductivité thermique,  $T$  la température et  $\overrightarrow{\nabla}$  l'opérateur gradient,  $\overrightarrow{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  (il est d'usage de noter de manière  
40 équivalente,  $\overrightarrow{\text{grad}}$  ou  $\overrightarrow{\nabla}$ ).

### 1.2.2 L'équation de la chaleur

L'objectif de ce paragraphe est d'établir l'équation de la chaleur en utilisant les principes de la thermodynamique et la loi de Fourier.

Considérons un élément de volume  $d\tau$  d'un matériau. En lui appliquant le premier principe de  
45 la thermodynamique, on sait que sa variation d'énergie totale, qui est la somme de sa variation d'énergie interne et des énergies cinétique et potentielle macroscopiques, est égale au bilan de travail et de chaleur :

$$\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = W + Q \quad (2)$$

Si on considère un système au repos macroscopique, alors

50 
$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 + 0 = 0, \quad (3)$$

et par conséquent,

$$\Delta U = W + Q \quad (4)$$

Si la transformation que nous étudions est isochore, alors le travail est nul, si bien que la variation d'énergie interne, c'est à dire les variations énergétiques microscopiques, ne correspond  
55 qu'à la quantité d'énergie transférée par chaleur. Nous connaissons essentiellement trois formes de processus d'échanges thermiques : la conduction, la convection et le rayonnement. En faisant en outre l'hypothèse que le seul processus à l'oeuvre est conductif, nous utiliserons la loi de Fourier pour le décrire.

Notons  $c$  la chaleur spécifique par unité de volume,

60 
$$c = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) \quad (5)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du matériau. L'énergie interne de l'élément de volume à l'instant  $t$  est :

$$U(t, d\tau) = \rho c T(t, \tau) d\tau \quad (6)$$

où  $T(t, \tau)$  désigne la température de cet élément de volume à l'instant  $t$ . La variation d'énergie  
65 interne dans l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$  est :

$$U(t + dt, d\tau) - U(t, d\tau) = \rho c (T(t + dt, \tau) - T(t, \tau)) d\tau = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau \quad (7)$$

Par ailleurs, en utilisant la loi de Fourier pour l'élément de volume  $d\tau$ , l'apport de chaleur à cet  
élément de volume est égal à l'opposé du flux de densité de chaleur à travers la surface qui le  
délimite ou, par le théorème de Green-Ostrogradski, à l'opposé de la divergence de ce flux :

70 
$$\delta Q = -(\text{div} \cdot \vec{j}_Q) d\tau = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q) d\tau = \lambda \Delta(T) d\tau \quad (8)$$

où on note " $\text{div}(\cdot)$ " = " $\vec{\nabla} \cdot$ " l'opérateur divergence, et  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$ , avec  $\Delta$  l'opérateur  
Laplacien,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . En posant  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  le coefficient de diffusion ou diffusivité ther-  
mique, on obtient l'équation qui régit l'évolution temporelle et spatiale de la température dans  
un matériau macroscopiquement au repos, qui ne subit que des transformations isochores, et où  
75 les seuls échanges thermiques sont conductifs, soit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta(T) \text{ ou encore, à une dimension, } \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

C'est l'équation de la chaleur. On pourra remarquer que ce ne sont pas les variations spatiales de  
température qui sont importantes (comme c'est le cas dans la loi de Fourier) mais les variations  
des variations. Par exemple, dans le cas d'un profil linéaire de température, le système serait  
80 dans un régime permanent.

### 1.3 Le cas unidimensionnel de l'équation de la chaleur

Nous nous restreignons maintenant à une géométrie particulière, celle d'un fil infini unidimen-  
sionnel (on pourra imaginer qu'il s'agit de modéliser un barreau homogène cylindrique extrê-  
mement long, un fil métallique, etc). Nous simplifions également le problème en considérant  
85 qu'à tout instant strictement négatif, ce fil infini est à température nulle. A  $t = 0$ , l'origine des  
temps, ce fil subit une « impulsion » de température, c'est à dire que pour tout  $x$  non nul, la  
température est nulle alors qu'en  $x = 0$ , elle est infinie.

On peut résoudre l'équation de la chaleur pour cette géométrie et ces conditions initiales. La  
solution est, partout et à tout instant  $t \geq 0$ ,

90 
$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (10)$$

On peut effectivement vérifier que cette forme de profils de température  $T(x, t)$  vérifie l'équa-

tion unidimensionnelle de la chaleur pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t > 0$ . A  $t = 0$ , cette vérification est un peu plus délicate, mais on admettra ici que ce profil est bien solution et « concentre » la température de manière infinie, à l'origine. Avec le temps, le profil de température tend à

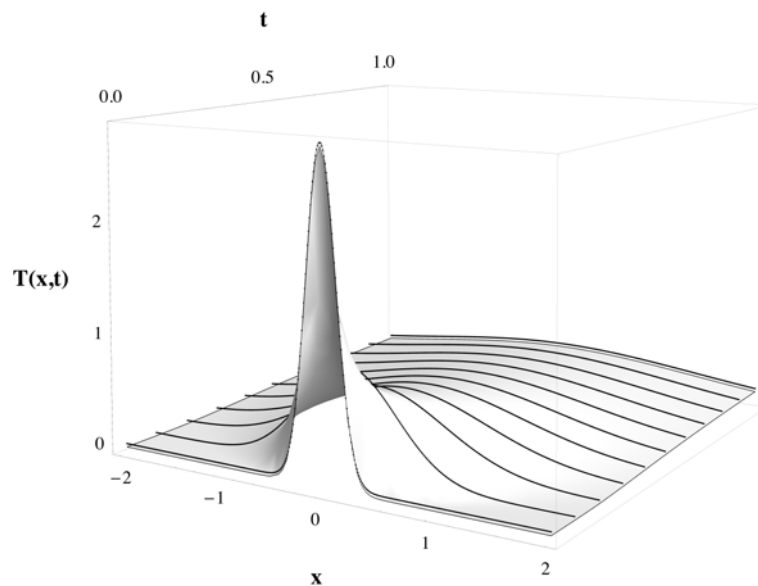


FIGURE 1 – Profil Gaussien de température en fonction du temps. L’enveloppe grise correspond à  $T(x,t)$  alors que les courbes noires correspondent à des « coupes » à  $t$  fixé, afin de bien visualiser le caractère Gaussien des profils de températures.

95 être plus homogène. Même s’il est extrêmement piqué aux temps faibles, ce profil est toujours Gaussien dans l’espace, avec une variance  $\sigma^2 = 2Dt$  (cf. figure 1). Nous changeons maintenant complètement de problème, et pourtant...

## 2. Le marcheur aléatoire unidimensionnel

On considère le problème statistique (probabiliste) suivant. A  $t = 0$ , on place un « marcheur » à  
 100 l’origine de  $\mathbb{Z}$ . A chaque pas de temps, qui est donc discret, comme l’espace, ce marcheur fait toujours un pas, soit vers la gauche, soit vers la droite, avec la même probabilité (on parle de marche symétrique). On se pose la question de connaître la probabilité d’être quelque part sur  $\mathbb{Z}$  après un certain temps  $t$ . Nous souhaiterions également avoir une description de ce phénomène dans un régime continu, c’est à dire sur  $\mathbb{R}$  plutôt que sur  $\mathbb{Z}$ , et en temps continu.

### 105 2.1 Résolution directe par le calcul probabiliste

A  $t = 0$ , le marcheur est sûrement en  $x = 0$ . A  $t = 1$ <sup>1</sup>, il est en  $x = -1$  ou en  $x = +1$  avec la même probabilité  $1/2$ . A  $t = 2$ , le marcheur peut être en  $x = -2$  s’il a fait un pas à gauche en partant de la position  $x = -1$  qu’il aurait eu en  $t = 1$ . La probabilité d’y être est égale à  $1/4$ .

1. L’espace étant discrétisé, il est naturel de discrétiser également le temps en « durée du pas ».

Il pourrait également être revenu en  $x = 0$ . Pour ce faire, il aurait été en  $x = -1$  ou en  $x = 1$  à  $t = 1$ . La probabilité d'y être est égale à  $1/4 + 1/4 = 1/2$ . Enfin, la marche étant symétrique, il peut également être en  $x = 2$ , avec la même probabilité qu'être en  $x = -2$ , soit  $1/4$ . D'autre part, ayant nécessairement fait 2 pas, et pas un de plus, le marcheur ne peut pas être en  $|x| > 2$ , ni être en position impaire, i.e  $|x| = \pm 1$ . On peut, en procédant de la sorte, calculer toutes les probabilités d'être n'importe où sur  $\mathbb{Z}$  au bout d'un certain temps  $t$ . Voici par exemple les probabilités d'occupation des positions au cours des 4 premiers pas du marcheur.

	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$t = 0$	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$t = 1$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$t = 2$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$t = 3$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
$t = 4$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

TABLE 1 – Probabilités d'occupations des positions sur  $\mathbb{Z}$  pour un marcheur symétrique, avec sa position d'origine et lors de ses 4 premiers pas. La première ligne indexe les positions, la première colonne les instants qui correspondent aux temps des pas successifs. Noter que les unités sont arbitraires.

On remarque qu'à un facteur de normalisation près, cette table n'est autre qu'un triangle de Pascal, où chaque ligne doit être normalisée par le facteur  $1/2^t$  (cf. tableau 2).

	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$1/2^0$	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$1/2^1$	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$1/2^2$	0	0	1	0	2	0	1	0	0
$1/2^3$	0	1	0	3	0	3	0	1	0
$1/2^4$	1	0	4	0	6	0	4	0	1

TABLE 2 – Reformulation du tableau 1 sous la forme d'un triangle de Pascal. La première ligne indexe les positions du marcheur ; la première colonne, le coefficient de normalisation dont il faut tenir compte pour obtenir les probabilités d'occupation de chaque position au temps correspondant.

Si on note  $P_n(l)$  la probabilité d'être en  $x = l$  après  $n$  pas, alors cette probabilité est donnée par

$$P_n(l) = \binom{n}{\frac{n+l}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!2^{-n}}{\left(\frac{n+l}{2}\right)! \left(\frac{n-l}{2}\right)!} \quad (11)$$

Remarquez que cette quantité est nulle si  $l$  et  $n$  ne sont pas de même parité. De plus, il est

nécessaire que  $|l| \leq n$ . Prenons maintenant du « recul » et observons ce problème aux grandes échelles de temps et d'espace, c'est à dire  $n$  et  $l$  grands devant 1. On se pose la question de connaître la probabilité que le marcheur soit entre deux points  $l_1$  et  $l_2$  qui sont « proches » l'un de l'autre, c'est à dire  $l_2 = l_1 + \delta l$ , avec  $l_1 \gg 1$  et  $\delta l \ll l_1$ , probabilité qu'on notera  $\mathbb{P}[X \in [l_1, l_2]]$ .

125 Bien sûr,

$$\mathbb{P}[X \in [l_1, l_2]] = \sum_{l \in [l_1, l_2]} P_n(l) \quad (12)$$

Faisons l'approximation que sur cet intervalle, les probabilités  $P_n(l)$  varient peu. Alors,

$$\mathbb{P}[X \in [l_1, l_2]] \approx \frac{1}{2} |l_2 - l_1| P_n(l) \quad (13)$$

où le facteur  $1/2$  vient du fait que  $n$  et  $l$  doivent avoir même parité ; on prend donc un  $l$  représentatif de cet intervalle pour que la probabilité  $P_n(l)$  soit non nulle. On cherche à présent un équivalent de cette probabilité, où  $l$  est borné et où  $n$  tend vers l'infini. Pour ce faire, nous utilisons l'équivalent de Stirling,

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (14)$$

afin d'obtenir

$$135 \quad P_n(l) = \frac{n! 2^{-n}}{\left(\frac{n+l}{2}\right)! \left(\frac{n-l}{2}\right)!} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-l^2/2n) \quad (15)$$

si bien que :

$$\mathbb{P}[X \in [l_1, l_2]] \approx \frac{1}{2} |l_2 - l_1| P_n(l) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-l^2/2n) \times \delta l \quad (16)$$

On constate que la probabilité que le marcheur soit à un endroit (i.e dans un intervalle d'espace), après un grand nombre de pas, suit un profil Gaussien.

140 Jusqu'à présent, nous avons considéré un espace discrétisé. Pour passer à un espace continu, nous allons supposer qu'à chaque pas le marcheur franchit la distance  $a$  (en unité arbitraire) en un temps  $\tau$  (toujours en unité arbitraire). Nous identifions donc le nombre de pas  $n = t/\tau$  et la position dans l'espace à  $l = x/a$ . Dans ces conditions, la limite des grandes échelles de temps et d'espace se traduit par  $t/\tau$  et  $x/a \gg 1$ . Ainsi, la probabilité de l'Eq. 16 correspond maintenant

145 à la probabilité pour le marcheur d'être dans l'intervalle  $[x, x + dx]$  et elle s'identifie à  $P(x, t) dx$  où

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-x^2/2Dt), \text{ avec } D = \frac{a^2}{2\tau} \quad (17)$$

A ce stade, il est intéressant de vérifier qu'on est bien en train de manipuler des notions probabilistes cohérentes. Notons

$$150 \quad p(x, t) = P(x, t) dx \quad (18)$$

la probabilité pour le marcheur d'être dans l'intervalle  $[x, x + dx]$ . Sous cette forme, il faut réaliser qu'on définit ainsi une infinité **discrète** de valeurs, définies pour des



$x$  de  $\mathbb{R}$ , par pas de  $dx$ , qu'on s'est fixé. Autrement dit, nous avons  $x \in I_{dx} = ]-\infty, \dots, -3dx, -2dx, -dx, 0, dx, 2dx, 3dx, \dots, +\infty[$ . Nous pouvons donc calculer toutes les valeurs moyennes que nous souhaitons. Par exemple,

$$\sum_{x \in I_{dx}} p(x, t) \quad (19)$$

est la somme, à un instant donné, de toutes les probabilités d'être quelque part en  $I_{dx}$ , c'est à dire, d'être tout simplement quelque part. On reconnaît dans l'équation (19) une somme infinie qui définit une intégration à la Riemann, pourvu qu'on fasse tendre  $dx$  vers 0. Alors

$$\sum_{x \in I_{dx}} p(x, t) \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx \quad (20)$$

Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-x^2/2Dt) dx = 1 \quad (21)$$

La probabilité d'être quelque part est égale à 1 : les probabilités que nous avons construites sont bien cohérentes.

En moyenne, où est le marcheur ? Cette position moyenne, si elle existe (et que nous notons  $\bar{X}$ ), est donnée par

$$\bar{X}(t) = \sum_{x \in I_{dx}} x \times p(x, t) \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-x^2/2Dt) dx = 0 \quad (22)$$

En moyenne, le marcheur ne se déplace pas ! On sait pourtant qu'il n'arrête pas de marcher. Pour caractériser l'amplitude de ses excursions, nous pouvons quantifier comment il « dévie » de sa valeur moyenne, c'est à dire, calculer sa déviation standard,

$$\sigma = \sqrt{(X - \bar{X})^2} = \sqrt{X^2 - \bar{X}^2} \quad (23)$$

Sachant que  $\bar{X} = 0$ , nous avons

$$\sigma^2 = \bar{X}^2 = \sum_{x \in I_{dx}} x^2 \times p(x, t) \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-x^2/2Dt) dx = 2Dt \quad (24)$$

En termes de probabilités, nous pouvons dire que le marcheur reste essentiellement dans une zone d'espace qui croît comme la racine carrée du temps  $t$ . Remarquez qu'un marcheur « motivé », et non pas « ivre et symétrique », aurait plutôt tendance à aller toujours dans une seule et même direction. Dans ces conditions, la zone d'espace croîtrait linéairement en  $t$  : on parlerait de propagation. Ici, on parle de **diffusion**.

Enfin, nous noterons qu'au delà de ces notions probabilistes, ce profil Gaussien est en tout point  
180 identique à celui de l'évolution de la température dans le cadre de l'équation unidimensionnelle  
de la chaleur. Afin de mieux cerner l'origine de cette similitude, nous pouvons résoudre le pro-  
blème du marcheur aléatoire symétrique différemment. Au lieu de calculer directement toutes  
les probabilités, nous allons nous intéresser à l'équation récurrente qui calcule les probabilités  
du marcheur au temps  $n + 1$  d'être quelque part, en fonction de celles d'être ailleurs au temps  
185 précédent  $n$ .

## 2.2 Résolution du problème du marcheur aléatoire symétrique via une équation aux pro- babilités et son écriture dans le continu : une version simplifiée de l'équation de Fokker-Planck

Nous gardons les mêmes notations que la section précédentes. Au temps  $n + 1$ , la probabilité  
190 que le marcheur soit en  $x = l$  est égale à la somme des probabilités, multipliées par  $1/2$ , qu'il  
soit un pas plus loin, à droite ou à gauche :

$$P_{n+1}(l) = \frac{1}{2} (P_n(l-1) + P_n(l+1)) \quad (25)$$

A cette équation, nous pouvons de part et d'autre soustraire la probabilité qu'avait le marcheur  
d'être déjà à la même position l'instant précédent,

$$195 \quad P_{n+1}(l) - P_n(l) = \frac{1}{2} (P_n(l-1) + P_n(l+1) - 2P_n(l)) \quad (26)$$

Nous allons maintenant passer à la limite du continu pour cette équation discrète, en asso-  
ciant, comme à la section précédente, les incréments discrets d'espace et de temps à des valeurs  
que nous modifierons ensuite. Nous noterons  $P(x, t) = P(x = l \times a, t = n \times \tau) = P_n(l)$ . Comme  
précédemment, nous faisons l'approximation des grandes échelles de temps et d'espace,  $t/\tau$  et  
200  $x/a \gg 1$ , mais au lieu de stipuler que  $t$  et  $x$  sont grands, nous partons du principe que  $\tau$  et  $a \rightarrow 0$ .  
Alors :

$$P_{n+1}(l) - P_n(l) = P(x, t + \tau) - P(x, t) = \tau \frac{\partial P}{\partial t} + o(\tau) \quad (27)$$

et

$$\frac{1}{2} (P_n(l-1) + P_n(l+1) - 2P_n(l)) = \frac{1}{2} (P(x-a, t) + P(x+a, t) - 2P(x, t)) \quad (28)$$

$$205 \quad = \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + o(a^2) \quad (29)$$

si bien que l'équation discrète (26) devient, en ne retenant que les termes de plus bas ordre en  $\tau$

et  $a$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{a^2}{2\tau} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (30)$$

ou encore, en posant  $D = a^2/2\tau$ ,

210 
$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (31)$$

Il est d'usage d'appeler cette équation l'équation de Fokker-Planck<sup>2</sup> simplifiée.

### 2.3 Discussion

Ce résultat est remarquable. D'une part, l'équation de Fokker-Planck est absolument identique à l'équation unidimensionnelle de la chaleur que nous avons obtenue dans la section 1.2.2. Par  
215 conséquent, le fait que la résolution directe du problème discret de la statistique du marcheur aléatoire symétrique nous donne des probabilités Gaussiennes quand on passe à la limite du continu n'est plus une surprise. En effet, la résolution de l'équation de la chaleur, donnée par l'équation (10), nous donne une solution à profil Gaussien. D'autre part, on peut se risquer à donner une interprétation microscopique à cette équation de la chaleur. L'obtention de cette  
220 équation passe par le premier principe qui stipule, sous nos hypothèses, que

$$\delta U = Q \quad (32)$$

c'est à dire, à quelques constantes près, que

$$\delta T = Q \quad (33)$$

La température, qui traduit les degrés de liberté internes, donc microscopiques, est associée à  
225 un échange de chaleur, qui est associée à un courant (loi de Fourier). Ce courant est lui même associé aux variations de température, c'est à dire aux variations (fluctuations) des degrés de liberté internes. Ces degrés de liberté, nous pouvons les imaginer comme représentés par des marcheurs, très nombreux, qui partent au même moment de leur point de départ (ici l'origine), et qui **diffusent** au cours du temps. Un marcheur peut avoir un comportement inattendu, un  
230 autre aussi, mais en moyenne, parce qu'ils sont extrêmement nombreux, ils définissent une tendance globale, tendance qui est traduite par la température. En effet, la probabilité de trouver un marcheur dans l'intervalle  $[x, x+dx]$  à l'instant  $t$  n'est autre que  $P(x,t)dx$  c'est à dire  $T(x,t)dx$ . De ce point de vue, la température, convenablement normalisée et intégrée sur un élément infinitésimal d'espace, n'est rien d'autre qu'une mesure probabiliste !

235

---

2. Du nom du physicien néerlandais Adriaan Fokker et du physicien allemand Max Planck.

### 3. Du marcheur aléatoire au mouvement Brownien, et des équations différentielles... pas comme les autres

Ce passage à la limite que nous avons fait, en faisant  $\tau$  et  $a \rightarrow 0$ , permet de définir ce qu'on appelle le mouvement Brownien. Pour le physicien, nous dirons que c'est une marche aléatoire symétrique où les incréments d'espace et de temps sont infiniment petits. Le nom de ce processus est dû au botaniste écossais Robert Brown (1827) qui observa le mouvement erratique de petites particules indépendantes à l'intérieur de grains de pollen. Ce qui est marquant, sous l'angle historique, c'est qu'il faudra attendre près de 80 ans pour unifier différents points de vue : le mouvement Brownien, les marches aléatoires, l'équation de la chaleur.

Nous nous intéressons maintenant à l'utilisation que l'on peut faire de ce processus temporel, le mouvement Brownien, qui permet à la fois d'évoluer dans le temps et de tenir compte d'un caractère aléatoire. Si nous revenons à la description de ce processus via une marche aléatoire, nous obtenons notre premier tableau probabiliste,

	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$t = 0$	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$t = 1$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$t = 2$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$t = 3$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
$t = 4$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

TABLE 3 – Probabilités d'occupations des positions sur  $\mathbb{Z}$  pour un marcheur symétrique, avec sa position d'origine et lors de ses 4 premiers pas. La première ligne indexe les positions, la première colonne les instants qui correspondent aux temps des pas successifs. Noter que les unités sont arbitraires.

Il faut réaliser que ce tableau a été obtenu en faisant directement le calcul des probabilités. On aurait aussi pu le déterminer de manière approchée, en faisant plusieurs marches, ici, des marches de 4 pas. Une marche de 4 pas, c'est tirer à pile ou face (ou à droite (D), gauche (G)) 4 fois, D et G étant de même probabilité, et se déplacer en suivant le résultat du tirage. A priori, une marche visite certains sites (certainement pas tous), mais c'est en moyennant toutes les marches, et avec un très grand nombre de marches, que nous obtiendrions les probabilités du tableau précédent. On dit qu'une marche constitue un scénario, ou un évènement, et c'est seulement la moyenne sur un très grand nombre d'évènements qui a du sens en termes de probabilités.

Représentons une marche de la façon suivante. Sur l'axe des ordonnées on indique la position et sur l'axe des abscisses, le temps qui s'écoule. Nous reportons ci-après 20 évènements, c'est à dire 20 marches à 4 pas différentes (cf. figure 2).

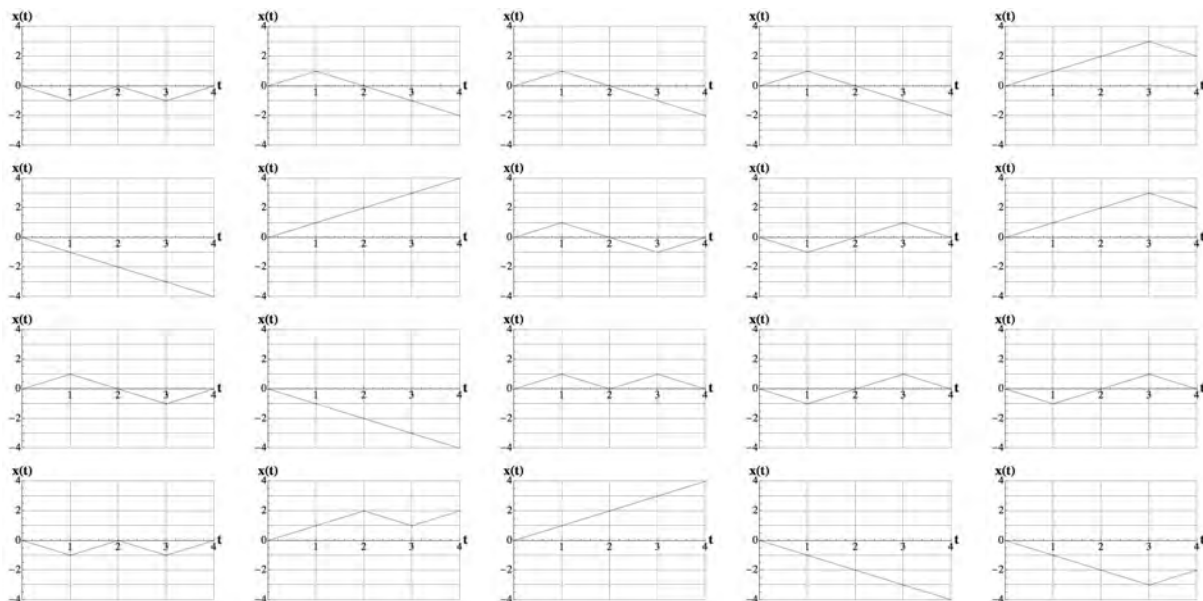


FIGURE 2 – Un ensemble de 20 marches à 4 pas, 2 à 2 indépendantes.

Si nous analysons ces 20 évènements indépendants, nous obtenons que pour  $t = 0$ , le point  $x = 0$  est atteint (évidemment) 20 fois et qu'il est associé à la probabilité  $P_0(0) = 1$ . Pour  $t = 1$ , le point  $x = -1$  est atteint 9 fois et le point  $x = 1$  est atteint 11 fois, soit les probabilités respectives  $P_1(-1) = 9/20 = 0.45$  et  $P_1(1) = 11/20 = 0.55$ , qui se rapprochent de la valeur exacte 0.5, que nous avons calculée dans le tableau précédent. Et ainsi de suite pour d'autres positions et d'autres temps. Si nous augmentons le nombre de scénarios, les probabilités « expérimentales » que nous obtiendrions sur la base de ces réalisations convergeraient de mieux en mieux (en un sens qu'il est possible de décrire très précisément mais qui dépasse l'objectif de ce document) vers les valeurs exactes. Comme nous l'avons précisé dans la section précédente, l'intérêt de ces marches apparaît quand on sait les décrire par une approximation de milieu continu. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser un très grand nombre de pas. La figure 3 donne un exemple d'une telle marche pour 50 000 pas.

Cette trajectoire, que nous appellerons Brownienne, et que nous noterons  $B_t$ <sup>3</sup>, est extrêmement irrégulière. Elle traduit le mouvement d'un marcheur qui se déplace de manière isotrope vers la droite ou vers la gauche, de manière aléatoire, à une dimension. En fait, cette trajectoire correspond aussi à celle d'une particule qui subit des chocs incessants, chocs qui ont lieu dans des intervalles de temps très courts, dans un milieu homogène et isotrope. Autrement dit, ce n'est plus le marcheur qui est ivre ; il est tout ce qu'il y a de plus sobre, mais il est à chaque pas soumis à une force extérieure (à sa volonté). S'il fallait décrire cette marche par une équation différentielle, nous dirions que la position de la particule à l'instant  $t + \delta t$  dépend de sa position à l'instant  $t$ , à laquelle il faut ajouter une composante **aléatoire**, qui traduit l'imprévisibilité des

3. Nous verrons un peu plus loin que cette notation peut être précisée.

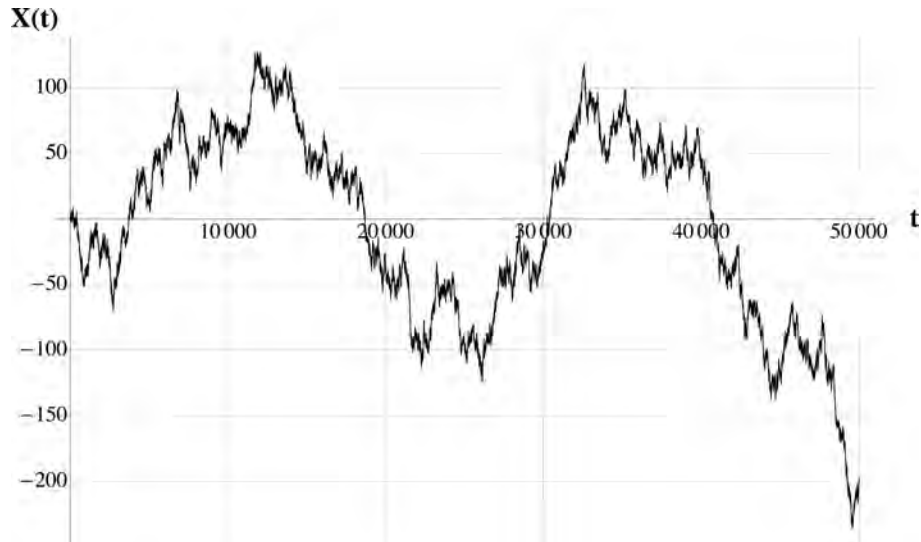


FIGURE 3 – Une marche de 50 000 pas.

chocs successifs (ou la confusion du marcheur) :

$$X(t + \delta t) = X(t) + \xi(\delta t) \quad (34)$$

285 Notez que la composante aléatoire ne dépend pas de la position d'espace (aller à droite ou à gauche ne dépend pas de l'endroit où on est), ni de l'instant  $t$  quand cela se produit (le marcheur fait toujours la même chose, que ce soit au début, ou au cours de sa marche). Elle se comporte exactement comme une marche aléatoire, pourvu que cet incrément  $\delta t$  soit beaucoup plus grand que le pas de temps  $\tau$  entre deux sauts (les chocs successifs). Autrement dit, si nous voulions simuler, avec un ordinateur, cette trajectoire, nous partirions de  $X(0)$  puis, pour aller  
 290 de  $X(0)$  à  $X(\delta t)$ , nous ferions par exemple 1000 tirages à gauche ou à droite, qui correspondraient à un pas de temps discrétisé de la marche aléatoire  $\tau = \delta t/1000$ . Et ainsi de suite pour passer à  $X(2\delta t), X(3\delta t), \dots$ , et construire une telle trajectoire Brownienne  $B_t = X(t)$ . Il existe d'autres façons de construire un tel chemin, plus efficaces et plus contrôlées, mais qui dépassent l'objectif de ce document. Remarquons que l'équation

295 
$$X(t + \delta t) = X(t) + \xi(\delta t) \quad (35)$$

pourrait également s'écrire

$$dX(t) = X(t + \delta t) - X(t) = \xi(\delta t) \quad (36)$$

Dans le cas du mouvement Brownien, il s'avère en outre que la partie aléatoire se simplifie et que  $\xi(\delta t) = \xi \delta t$ , où  $\xi$  est maintenant une fonction aléatoire indépendante du temps. Remarquez  
 300 que cela n'a, en soi, rien d'exceptionnel. Au premier ordre, on écrit souvent, pour une fonction

$f, f(\delta t) \approx f(0) + f'(0)\delta t$ . Dans le cas présent, par analogie, nous aurions  $f(0) = 0$  et  $f'(0)$  qui serait une fonction aléatoire.

305 Finalement, cette équation (36) ressemble à une équation différentielle ordinaire, si ne n'est le second membre, qui n'est pas déterministe, comme on en a l'habitude, mais aléatoire ! Les conditions mathématiques rigoureuses pour définir une telle équation différentielle sont maintenant bien connues et définissent ce qu'on appelle le domaine du calcul stochastique (i.e du calcul qui relève des phénomènes aléatoires).

Par conséquent, nous dirions que l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = \xi \delta t, X(t = 0) = X_0 \quad (37)$$

310 où  $\xi \delta t$  est l'approximation continue d'une marche aléatoire symétrique discrète à pas discret infinitésimal, entre deux temps distants de  $\delta t$ , a pour solution le mouvement Brownien  $B_t$ . Chaque trajectoire ainsi définie est un évènement de ce mouvement Brownien. Autrement dit, un mouvement Brownien, c'est un ensemble de trajectoires. Chacune d'elle est en général repérée par une lettre,  $\omega$ , qui la singularise parmi toutes les trajectoires de l'ensemble,  $\omega \in \Omega$ . On notera donc une trajectoire,  $B_t(\omega)$ , et le mouvement Brownien,  $B_t = \{B_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ .

325 Si nous faisons la moyenne sur une infinité d'évènements, i.e une infinité de trajectoires, alors en faisant des coupes à chaque instant  $t$ , en en faisant la moyenne suivant ces coupes, nous obtiendrions la courbe que nous avons obtenue aux sections précédentes, l'ensemble de cloches Gaussiennes (cf. figure 1). Ce ne serait, ni plus, ni moins, que le même travail que nous avons fait avec l'exemple des 20 marches discrètes, mais avec des intervalles de temps et d'espace infinitésimaux.

Remarquons une équivalence tout à fait extraordinaire ; pour résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (38)$$

325 nous pouvons utiliser les outils du calcul « standard », et obtenir directement le comportement de  $P(x, t)$ . Nous pourrions aussi générer un très grand nombre de courbes Browniennes  $B_t(\omega)$ , puis faire leur moyenne en tout point du temps et de l'espace. Autrement dit, ce qui semble parfois avoir un caractère complètement déterministe se révèle être également une quantité probabiliste, et inversement !

#### 330 4. Une illustration des équations différentielles stochastiques dans la vie « pratique »

Nous venons de définir le mouvement Brownien, ou les trajectoires Browniennes, comme une façon de décrire le mouvement de particules dans un milieu homogène et isotrope, soumise à des chocs incessants et aléatoires, qui la font se comporter comme un marcheur aléatoire

symétrique,

335

$$dX(t) = \xi dt \quad (39)$$

A priori, nous pourrions imaginer que dans des cas pratiques, la propagation de cette particule se fait dans un milieu qui n'est pas nécessairement homogène, isotrope, et que les chocs possèdent eux mêmes une structure particulière. Considérons par exemple que la variation de la position n'est pas indépendante de la position originale, ce qui est le cas quand on écrit  $dX(t) = \xi dt$ ,  
 340 mais que cette variation est d'autant plus grande que la position est loin de l'origine, et petite autrement, c'est à dire,

$$dX(t) = X(t)\xi dt \quad (40)$$

Supposons également qu'indépendamment du bruit, c'est à dire du caractère aléatoire, la particule suit une tendance particulière, proportionnelle à sa position. Finalement, nous aurions :

345

$$dX(t) = X(t)dt + X(t)\xi dt \quad (41)$$

Peut-on résoudre cette équation différentielle stochastique ? La réponse est oui, et la solution s'écrit sous la forme,

$$X(t) = X(0)e^{t/2+B_t} \quad (42)$$

où  $B_t$  est un mouvement Brownien. Traçons un événement solution de cette équation, c'est à  
 350 dire l'évolution temporelle d'un  $X(t)$  pour une trajectoire Brownienne donnée (cf. figure 4).

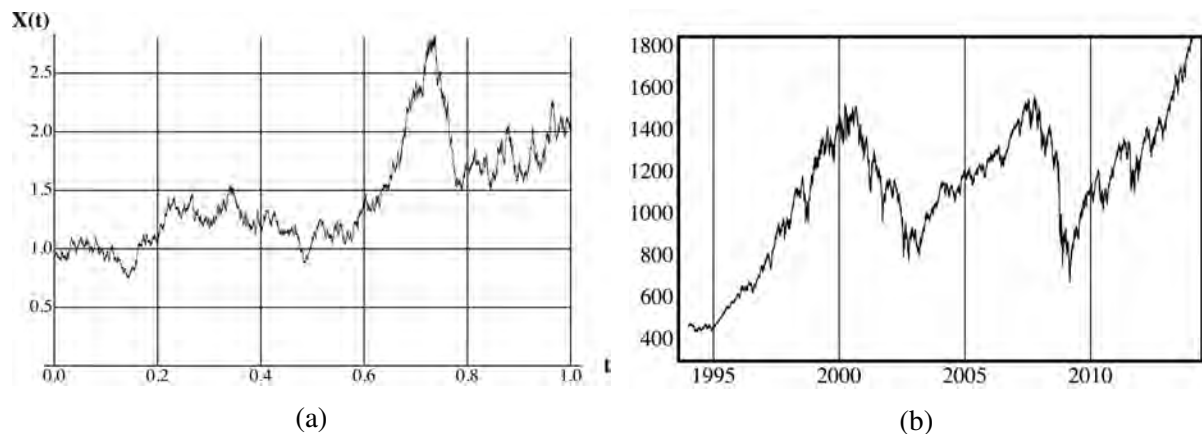


FIGURE 4 – (a) : Une trajectoire qui correspond à un événement Brownien Géométrique, solution de l'équation différentielle stochastique (41). (b) : Cours de l'indice boursier S&P 500 en \$US, sur les 20 dernières années. Source : Mathematica<sup>TM</sup> financial data. On peut constater, au moins visuellement, que la modélisation de certains cours semble être qualitativement décrite par un mouvement Brownien Géométrique. Il existe des tests statistiques qui permettent d'élaborer une argumentation plus quantitative que la simple observation « à l'oeil », et qu'on appelle des tests de « maximum de vraisemblance ». Ces tests confirment que certains cours sont efficacement modélisés par des mouvement Brownien Géométriques.

Une telle trajectoire est un événement de ce qu'on appelle un mouvement Brownien géomé-



trique. Cette équation (41) est très utilisée en mathématiques financières pour étudier l'évolution temporelle des cours de certains prix dans les marchés financiers, dans le cadre du modèle de Black-Scholes<sup>4</sup>. Elle permet notamment d'obtenir des formules de certains produits dérivés financiers, comme par exemple des assurances sur la croissance ou la baisse des cours.

## 5. Conclusion

Depuis le début du XIX<sup>ème</sup> siècle, et les contributions de Fourier, le physicien a modélisé la propagation de la chaleur dans les milieux continus avec précision, et construit des modélisations microscopiques qui ont permis de faire le lien entre des comportements a priori déterministes avec des interprétations probabilistes. Le mathématicien s'est également saisi de ces problématiques, et fait de nos jours fréquemment ce type d'allers-retours entre l'aléatoire et le déterministe, via l'utilisation des équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques. Ce type d'équations est maintenant utilisé dans de nombreux domaines : la physique, les mathématiques, la botanique, comme nous l'avons vu dans ce document, mais aussi en traitement du signal, en biologie, etc.

Comme souvent en sciences, les concepts traversent les domaines de recherche. Et cette thermodynamique, qui est née comme une science de l'ingénieur, en est le parfait exemple.

---

4. Du nom de l'économiste américain Fischer Black et de l'économiste Canadien Myron Scholes.