

EPREUVE DE TIPE PARTIE D

**TITRE : Trois étapes dans l'évolution de la géométrie
Le théorème de Morley**

- Temps de préparation : **2h15**
- Temps de présentation devant le jury : **10 minutes**
- Entretien avec le jury : **10 minutes**

1 - GUIDE POUR LE CANDIDAT

Le dossier comporte 10 pages, les lignes et les formules possèdent des numérotations indépendantes, les formules ne sont pas prises en compte dans la numérotation des lignes.

Travail suggéré au candidat :

- Présenter l'organisation générale du texte et les outils mathématiques sur lesquels s'appuie chacune des preuves
- Identifier le principe et les points clés de la troisième preuve et d'au moins l'une des deux autres.
- Conclure relativement aux mérites comparés de ces démonstrations

Il est demandé de restituer un ensemble d'idées structurées ; il ne s'agit pas de recopier des formules.

2 - CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE

Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

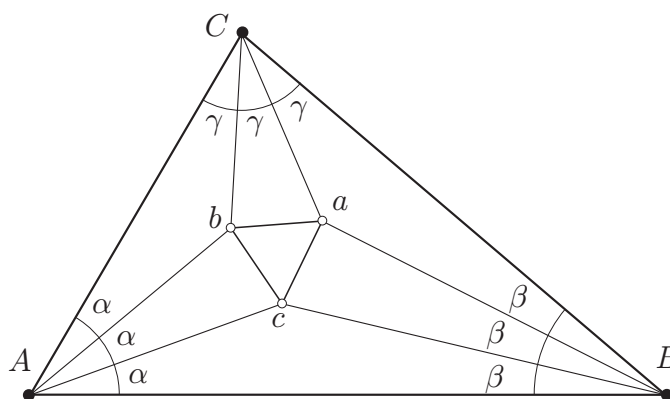
Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

Vous pouvez écrire sur le présent dossier, mais celui-ci est à remettre au jury en fin d'oral, ainsi que TOUS les autres dossiers, objets mis sur la table pendant votre prestation.

En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents dont vous comptez vous servir pendant l'oral, en entrant dans la salle vous devez être prêts à débiter votre exposé.

Introduction

Le théorème de Morley stipule que les intersections des trisectrices adjacentes des angles d'un triangle forment un triangle équilatéral. L'un des attraits de ce résultat hormis sa simplicité et le fait qu'une légende en attribue la paternité à l'empereur Napoléon, est qu'il ne fut découvert qu'en 1899, et par des voies tout-à-fait indirectes, en tant que sous-produit de l'étude des cardioïdes tangentes aux côtés d'un triangle, ce qui témoigne du fait que les voies de la découverte en mathématiques sont parfois étranges...



Coxeter attribue le caractère tardif de cette découverte à la réputation sulfureuse acquise par le problème de la trisection de l'angle dont l'impossibilité en général à l'aide d'une règle et d'un compas fit l'objet de diverses polémiques et ne fut démontrée qu'en 1836 par M.L. Wantzel (*Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*) On pourra consulter avec profit l'annexe 4.1 à cet égard.

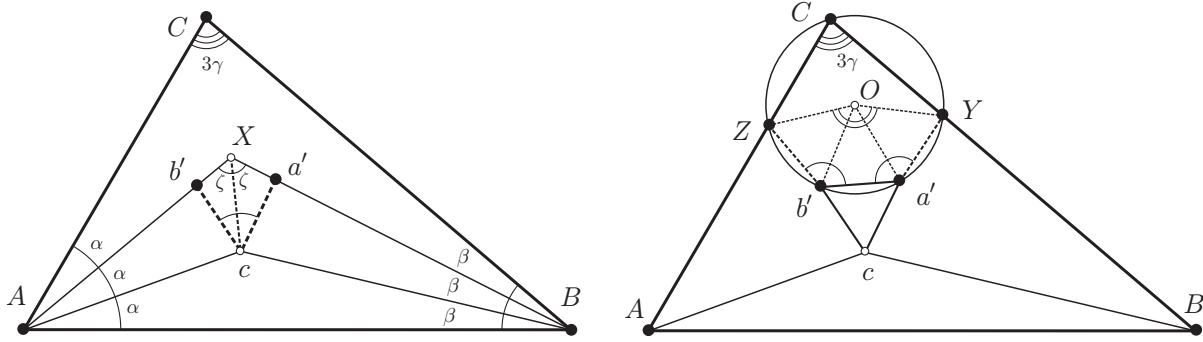
Dans la suite de ce document nous proposons trois démonstrations qui, parmi beaucoup d'autres, ont tout d'abord l'avantage de l'élégance (selon le rédacteur), mais permettent aussi de mesurer l'évolution du point de vue adopté par les mathématiciens relativement à la géométrie.

On trouvera dans ce texte deux sortes d'angles. Dans les *deux premières* démonstrations, on utilise des angles *non orientés* de mesure comprise entre 0 et π , (tels qu'on peut les mesurer avec un rapporteur), où par exemple la notation \widehat{ABC} désigne l'angle en B de la rotation qui amène indifféremment la droite portant BA sur la droite portant BC ou le contraire. Dans la *troisième* démonstration, les angles des rotations sont *signés* et leur mesure (modulo 2π) est égale à l'argument du nombre complexe qui les représente.

1 Une démonstration géométrique directe

La démonstration qui suit date de 1909, elle est due à M.T. Naraniengar et relève de la géométrie traditionnelle, ce qui n'enlève rien à son mérite ; le fait qu'elle fut popularisée par Coxeter (H.M.S. Coxeter, S.L. Greitzer : *Geometry revisited* 1967) en témoigne amplement.

▷ Notons X l'intersection des trisectrices Ab et Ba. Dans le triangle ABX, c est l'intersection des bissectrices respectives des angles en A et B, c'est donc également un point de la bissectrice en X. Construisons maintenant les points a' et b' respectivement situés sur BX et AX, de telle sorte que $\widehat{b'cX} = \widehat{a'cX} = \pi/6$, d'où il résulte que $\widehat{b'ca'} = \pi/3$. Les triangles b'cX et a'cX possèdent deux angles égaux et un côté en commun, ils sont donc symétriques par rapport à la droite Xc ; en particulier on a $a'c = b'c$, d'où il résulte que le triangle a'b'c, dont l'angle en c a été construit égal à $\pi/3$, est équilatéral. A ce stade, il est bien clair que le triangle a'b'c est candidat à être confondu avec abc, c'est ce que nous allons prouver dans la suite.



▷ Notons maintenant $\widehat{a'Xc} = \widehat{b'Xc} = \zeta$ et remarquons que dans le triangle ABX , on a $2\alpha + 2\beta + 2\zeta = \pi$; comme par ailleurs dans le triangle ABC on a $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$, il en résulte que $\zeta - \gamma = \pi/6$, et par conséquent

$$\widehat{cb'X} = \widehat{ca'X} = \pi - (\pi/6 + \zeta) = \pi - (\pi/3 + \gamma) = 2\pi/3 - \gamma. \quad (1)$$

▷ Construisons les points Y et Z , respectivement symétriques de c par rapport à BX et AX , ils sont respectivement situés sur BC et AC , et on aura d'une part

$$\|Ya'\| = \|a'c\| = \|a'b'\| = \|b'c\| = \|Zb'\|, \quad (2)$$

puisque le triangle $a'b'c$ est équilatéral, et d'autre part d'après la formule (1)

$$\widehat{Zb'a'} = \widehat{Zb'c} - \widehat{cb'a'} = \widehat{2cb'X} - \pi/3 = \pi - 2\gamma, \text{ et de même } \widehat{Ya'b'} = \pi - 2\gamma. \quad (3)$$

▷ Notons maintenant O l'intersection des bissectrices des angles $\widehat{Ya'b'}$ et $\widehat{a'b'Z}$; le triangle $b'Oa'$ est isocèle et symétrique du triangle YOa' par rapport à Oa' , d'où il résulte que $OY = Oa' = Ob' = OZ$. Nous avons donc montré que les points Y , a' , b' et Z sont situés sur un même cercle \mathcal{C} de centre O ; de plus les angles au centre qui interceptent les trois arcs Ya' , $a'b'$, et $b'Z$ sont égaux à $\pi - 2\widehat{b'a'Y}/2 = 2\gamma$.

▷ Il en résulte que l'angle au centre interceptant l'arc ZY de \mathcal{C} est égal à 6γ , et par conséquent, selon la réciproque du théorème de l'arc capable (voir l'annexe 4.2) que \mathcal{C} est situé sur le cercle \mathcal{C} . Le théorème de l'arc capable nous montre alors que $\widehat{ZCb'} = \widehat{b'Ca'} = \widehat{a'CY} = \gamma$, ce qui prouve qu'en fait a' et b' sont situés sur les trisectrices de \widehat{ACB} , soit en fait que $a' = a$ et $b' = b$.

▷ Nous avons donc démontré que abc est un triangle équilatéral.

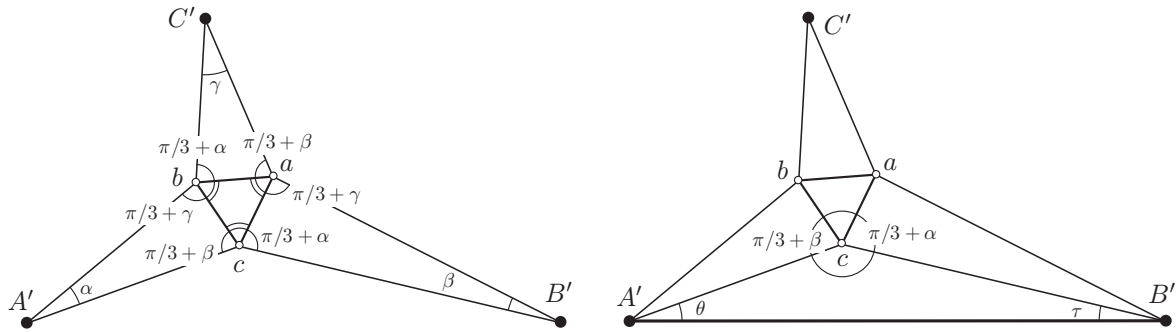
2 Une démonstration indirecte utilisant les fonctions trigonométriques

Cette démonstration, due à D.J. Newman, date de 1996. Elle a pour particularité de mêler géométrie et trigonométrie, quittant ainsi en quelque sorte Euclide pour Descartes, ce qui aboutit à une preuve particulièrement courte, mais de nature indirecte. De l'article de Newman extrayons ces quelques phrases :

When I read, or rather tried to read Morley's proof of this startling theorem, I found it absolutely impenetrable. I told myself that maybe in the future years I would return and then understand it. I never succeeded in that, and even when I read the much simpler proof based on trigonometry, or the fairly simple geometric proof due to Navansingar (sic!), there was still too much complexity or lack of

*motivation. Were we to give up, forever, understanding the Morley miracle? Or are we failing because we are asking too little?*¹

▷ On commence par se donner un triangle équilatéral : abc de côté d , ainsi que les angles α, β et $\gamma \in]0, \pi/3[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/3$. On construit alors le point A' tel que $\widehat{bcA'} = \pi/3 + \beta$ et $\widehat{cbA'} = \pi/3 + \gamma$; de même on construit B' tel que $\widehat{acB'} = \pi/3 + \alpha$ et $\widehat{caB'} = \pi/3 + \gamma$, ainsi que C' tel que $\widehat{baC'} = \pi/3 + \beta$ et $\widehat{abC'} = \pi/3 + \alpha$. Les notations nous invitent à supposer que $A'B'C'$ est candidat à être confondu avec ABC , mais bien entendu, cela ne sera possible qu'à la condition d'ajuster la dimension d du triangle abc ainsi que sa position dans le plan. On peut être légitimement admiratif devant l'intuition ayant présidé au choix des angles.



▷ Constatons tout d'abord que

$$\widehat{bA'c} = \pi - (\pi/3 + \beta + \pi/3 + \gamma) = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha, \quad (4)$$

et que de même $\widehat{cB'a} = \beta$ et $\widehat{aC'b} = \gamma$. Dans le triangle $A'bc$, on aura

$$\|A'c\| \sin \alpha = \|bc\| \sin (\pi/3 + \gamma) = d \sin (\pi/3 + \gamma), \quad (5)$$

et de même $\|B'c\| \sin \beta = d \sin (\pi/3 + \gamma)$, d'où $\|B'c\| / \|A'c\| = \sin \alpha / \sin \beta$.

▷ Considérons maintenant le triangle $A'cB'$; le décompte des angles autour de c nous montre que

$$\widehat{A'cB'} = 2\pi - (\pi/3 + \beta + \pi/3 + \alpha + \pi/3) = \pi - (\alpha + \beta), \quad (6)$$

et si nous notons $\theta = \widehat{cA'B'}$ et $\tau = \widehat{cB'A'}$, nous aurons d'une part $\theta + \tau = \pi - \widehat{A'cB'} = \alpha + \beta$, et d'autre part, comme précédemment, $\|A'c\| \sin \theta = \|B'c\| \sin \tau$, d'où

$$\sin \alpha / \sin \beta = \|B'c\| / \|A'c\| = \sin \theta / \sin \tau. \quad (7)$$

▷ Posons $\theta + \tau = s = \alpha + \beta$ et $\sin \alpha / \sin \beta = r = \sin \theta / \sin \tau$, on aura donc $\sin (s - \tau) / \sin \tau = r$ d'où $\sin s \cotg \tau - \cos s = r$, soit $\cotg \tau = (r + \cos s) / \sin s = \cotg \beta$ (par symétrie entre β et τ) et par conséquent $\tau = \beta$ et donc $\theta = \alpha$; on montre de même que $\widehat{C'A'b} = \alpha$, ce qui prouve que $\widehat{C'A'B'} = 3\alpha$ et finalement que le triangle $A'B'C'$ est semblable à ABC .

¹Lorsque je lus, ou plutôt tentai de lire, la démonstration de Morley de cet étonnant théorème, je la trouvai totalement impenétrable. Je me dis à moi-même que dans les années futures, j'y reviendrai peut-être et qu'alors je la comprendrai. Je n'y suis jamais parvenu et même quand je lus la démonstration beaucoup plus simple fondée sur la trigonométrie ou la preuve géométrique particulièrement simple de Navansiengar (sic!), je les trouvai encore trop complexes ou manquant de motivation. Devons-nous renoncer à jamais à comprendre le miracle de Morley? Ou échouons-nous pour en demander trop peu?

3 Un point de vue géométrique moderne

Cette dernière démonstration constitue une curiosité au sein de l'œuvre mathématique d'Alain Connes, l'un des neuf mathématiciens français à avoir reçu la médaille Fields (en 1982). Ses travaux, qui portent sur les applications des mathématiques à la physique théorique et en particulier sur les algèbres d'opérateurs et la théorie de la renormalisation, ne peuvent pas être considérés comme aisément accessibles au niveau de la taupe (et même un peu au-delà...)

La démonstration, quant à elle tout à fait élémentaire, qu'il a donnée en 1998 du théorème de Morley, n'est pas de même nature que les précédentes et ressortit à une conception moderne de la géométrie, considérée comme l'étude des groupes de transformations plutôt que comme celle des figures. Citons Connes avant de présenter sa démonstration :

*It was the first time I heard about Morley's result and when I came back home, following one of the advices of Littlewood, I began to look for a proof, not in books but in my head. My only motivation besides curiosity was the obvious challenge : this is one of the rare achievements of Bonaparte I should be able to compete with.*²

On pourra consulter les annexes 4.3, 4.4 et 4.5, où les symétries et les rotations du plan affine sont étudiées sous la forme de transformations du plan complexe.

Nous dirons que le triangle ABC est *direct* si l'ordre de ses sommets est celui du parcours de son bord dans le sens direct, et *rétrograde* dans le cas contraire. Notons que la propriété d'être direct (ou rétrograde) est commune à ABC et abc . Nous supposons désormais le triangle ABC direct.

3.1 Les sommets du triangle abc comme points fixes

▷ Notons ρ_A , ρ_B et ρ_C respectivement les rotations de centres A , B et C , et d'angles *orientés* 2α , 2β et 2γ , *positifs*, ainsi que σ_{Ac} la symétrie d'axe Ac et σ_{AB} celle d'axe AB . Dans l'annexe 4.4, on montre que la composée (dans l'ordre adéquat) de deux symétries relativement à des axes sécants formant entre eux un angle α , est une rotation d'angle 2α ayant pour centre leur point d'intersection, ce qui permet d'écrire $\rho_A = \sigma_{Ac} \circ \sigma_{AB}$; de même $\rho_B = \sigma_{BA} \circ \sigma_{Bc}$, d'où

$$\rho_A \circ \rho_B = \sigma_{Ac} \circ \sigma_{AB} \circ \sigma_{BA} \circ \sigma_{Bc} = \sigma_{Ac} \circ \sigma_{Bc}, \quad (8)$$

qui n'est autre qu'une rotation de centre c . Nous avons donc montré que les points a , b et c sont les points fixes des rotations respectives $\rho_B \circ \rho_C$, $\rho_C \circ \rho_A$ et $\rho_A \circ \rho_B$.

▷ De même, on aura $(\rho_A)^3 = \sigma_{AC} \circ \sigma_{AB}$, $(\rho_B)^3 = \sigma_{BA} \circ \sigma_{BC}$ et $(\rho_C)^3 = \sigma_{CB} \circ \sigma_{CA}$, d'où

$$(\rho_A)^3 \circ (\rho_B)^3 \circ (\rho_C)^3 = \sigma_{AC} \circ \sigma_{AB} \circ \sigma_{BA} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{CB} \circ \sigma_{CA} = Id \quad (9)$$

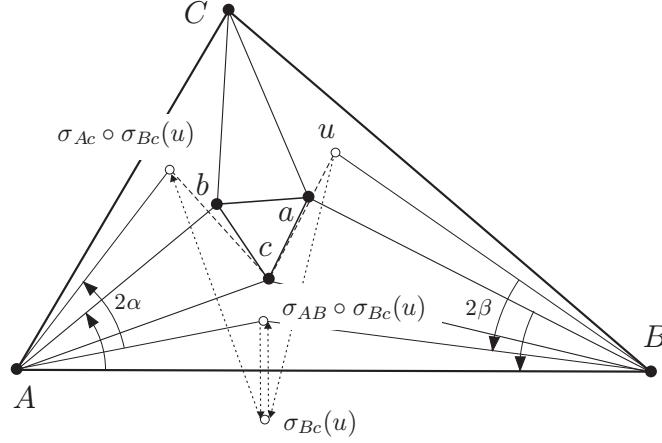
3.2 Une propriété caractéristique du triangle équilatéral

Notons ρ la rotation d'angle $2\pi/3$ ayant pour centre l'origine. Pour que le triangle abc , *direct*, soit équilatéral, il faut et il suffit que l'égalité suivante soit vérifiée : $\rho(\vec{cb}) = -\vec{ca}$. Si nous considérons alors les points du plan comme des nombres complexes, selon l'identification canonique $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + ix_2$, nous pouvons représenter la rotation ρ par la formule $\rho(z) = \nu z$, où $\nu = e^{2i\pi/3}$, ce qui nous conduit à écrire $\nu(b - c) = -(a - c)$, soit $a + \nu b - (1 + \nu)c = 0$, ou encore

$$a + \nu b + \nu^2 c = 0, \quad (10)$$

puisque $1 + \nu + \nu^2 = 0$.

²C'était la première fois que j'entendais parler du résultat de Morley, et quand je rentrai à la maison, selon les recommandations de Littlewood, je commençai par chercher une démonstration, non pas dans les livres, mais dans ma propre tête. Mon unique motivation, au-delà de la curiosité, était le défi évident : c'est là l'une des rares réussites de Bonaparte à laquelle je devrais pouvoir me mesurer.



3.3 Une propriété des transformations affines de \mathbb{C}

Les transformations affines du corps des complexes sont de la forme $\varphi(z) = pz + q$, où bien entendu, p et q sont deux nombres complexes ; elles représentent des translations du plan si $p = 1$, $q \neq 0$ et des rotations si $|p| = 1$, $p \neq 1$. Si φ n'est pas une translation, alors elle possède un point fixe t et un seul, donné par $t = pt + q$, ce qui permet d'écrire φ sous les deux formes suivantes :

$$\varphi(z) = pz + q = p(z - t) + t. \quad (11)$$

Les transformations affines de \mathbb{C} forment un groupe.

Nous nous intéresserons désormais aux rotations, et nous poserons $\rho_j(z) = p_j z + q_j = p_j(z - t_j) + t_j$, $j = 1, 3$ ainsi que $p_{j+3} = p_j$ et $q_{j+3} = q_j$. Si les $\rho_j \circ \rho_{j+1}$, $j = 1, 3$ ne sont pas des translations, et si $\mu = p_1 p_2 p_3 \neq 1$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3 = Id$, où Id note l'application identité.
- (ii) $\mu^3 = 1$ et $t_{12} + \mu t_{23} + \mu^2 t_{31} = 0$, où t_{12} , t_{23} et t_{31} sont les points fixes respectifs de $\rho_1 \circ \rho_2$, $\rho_2 \circ \rho_3$ et $\rho_3 \circ \rho_1$.

Démontrons donc cette assertion, qui constitue le point central de la démonstration de Connes :

▷ Déterminons à cet effet $(\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3$; on aura tout d'abord

$$(\rho_j)^3(z) = p_j^3(z - t_j) + t_j = p_j^3 z + t_j(1 - p_j^3) = p_j^3 z + q_j(1 + p_j + p_j^2), \quad (12)$$

d'où

$$\begin{aligned} (\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3(z) &= p_1^3 (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3(z) + q_1(1 + p_1 + p_1^2) \\ &= p_1^3 \left(p_2^3 (\rho_3)^3(z) + q_2(1 + p_2 + p_2^2) \right) + q_1(1 + p_1 + p_1^2) \\ &= p_1^3 \left(p_2^3 (p_3^3 z + q_3(1 + p_3 + p_3^2)) + q_2(1 + p_2 + p_2^2) \right) + q_1(1 + p_1 + p_1^2) \\ &= p_1^3 (p_2^3 p_3^3 z + p_2^3 q_3(1 + p_3 + p_3^2) + q_2(1 + p_2 + p_2^2)) + q_1(1 + p_1 + p_1^2) \\ &= p_1^3 p_2^3 p_3^3 z + p_1^3 p_2^3 q_3(1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 q_2(1 + p_2 + p_2^2) + q_1(1 + p_1 + p_1^2), \end{aligned} \quad (13)$$

soit $(\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3(z) = pz + q$ où

$$\begin{aligned} p &= p_1^3 p_2^3 p_3^3 = \mu^3 \text{ et} \\ q &= p_1^3 p_2^3 q_3(1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 q_2(1 + p_2 + p_2^2) + q_1(1 + p_1 + p_1^2). \end{aligned} \quad (14)$$

On a donc démontré, et c'est un point crucial, que

$$(\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3 = Id \Leftrightarrow (\mu^3 = 1 \text{ et } q = 0). \quad (15)$$

▷ Etudions les $\rho_j \circ \rho_{j+1}$: on aura

$$\rho_j \circ \rho_{j+1}(z) = p_j (p_{j+1}z + q_{j+1}) + q_j = p_j p_{j+1}z + p_j q_{j+1} + q_j = p_j p_{j+1} (z - t_{j,j+1}) + t_{j,j+1}, \quad (16)$$

d'où $t_{j,j+1} = (p_j q_{j+1} + q_j) / (1 - p_j p_{j+1})$, où $p_j p_{j+1} \neq 1$ en vertu de l'hypothèse. Il en résulte que

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & 0 \\ 0 & 1 & p_2 \\ p_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - p_1 p_2) t_{12} \\ (1 - p_2 p_3) t_{23} \\ (1 - p_3 p_1) t_{31} \end{pmatrix} \quad (17)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{1 + p_1 p_2 p_3} \{ (1 - p_j p_{j+1}) t_{j,j+1} - p_j (1 - p_{j+1} p_{j+2}) t_{j+1,j+2} + p_j p_{j+1} (1 - p_{j+2} p_{j+3}) t_{j+2,j+3} \} \\ &= -\mu \{ (1 - p_j p_{j+1}) t_{j,j+1} - p_j (1 - p_{j+1} p_{j+2}) t_{j+1,j+2} + p_j p_{j+1} (1 - p_{j+2} p_{j+3}) t_{j+2,j+3} \}, \end{aligned} \quad (18)$$

car d'après (15), comme on a supposé $\mu \neq 1$,

$$\mu^3 = 1 \implies \mu(1 + \mu + \mu^2) = (1 + \mu + \mu^2) \implies 1 + \mu + \mu^2 = 0, \quad (19)$$

ou encore $-1/\mu = 1 + \mu$.

▷ Remplaçant les q_j par leur expression dans la formule qui fournit q , *a straightforward computation* (dixit Connes) conduit à

$$q = -\mu p_1^2 p_2 (p_1 - \mu) (p_2 - \mu) (p_3 - \mu) (t_{12} + \mu t_{23} + \mu^2 t_{31}), \quad (20)$$

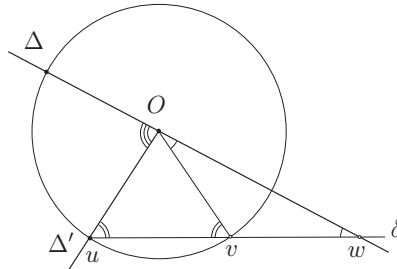
ce qui permet de conclure, toujours d'après (15) et (10). Le lecteur curieux pourra consulter dans l'annexe 4.6 (et éventuellement simplifier) le détail de ce calcul, dont la réalisation serait susceptible sinon d'être confiée, au moins d'être simplifiée par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Comme $p_j p_{j+1} \neq 1$, on aura $p_j - \mu \neq 0$ et par conséquent $q = 0$ si et seulement si $t_{12} + \mu t_{23} + \mu^2 t_{31} = 0$.

3.4 Une démonstration du théorème de Morley et sa généralisation

Prenons pour ρ_j les rotations respectives ρ_A, ρ_B et ρ_C , on en déduit immédiatement le théorème de Morley. Mais il est également possible de modifier les p_j en p'_j en multipliant l'un ou plusieurs d'entre eux par $e^{-2i\pi/3}$ ou $e^{2i\pi/3}$, on ne modifie pas alors $(\rho_1)^3 \circ (\rho_2)^3 \circ (\rho_3)^3$, et le résultat précédent reste valable sous réserve que $\mu' = p'_1 p'_2 p'_3 \neq 1$. Comme $\mu = e^{2i\pi/3}$, sur les 27 possibilités ainsi exhibées on doit en supprimer 9 qui correspondent à $p'_1 p'_2 p'_3 = e^{-2i\pi/3} p_1 p_2 p_3$, on aboutit donc ainsi à la construction de 18 triangles équilatéraux.

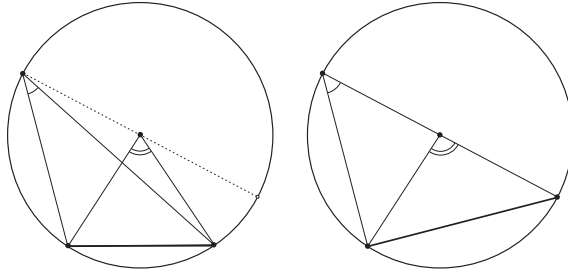
4 Annexes

4.1 La trisection de l'angle



La trisection de l'angle est impossible, si on ne dispose que d'une règle et d'un compas, par contre elle peut être réalisée à l'aide d'une règle sur laquelle deux points sont marqués et d'un compas. Soit d la distance entre ces deux points, les demi-droites Δ et Δ' étant données qui se coupent en O , on trace le cercle de centre O et de rayon d , il coupe la demi-droite Δ' en u . On cherche alors la droite δ passant par u et coupant respectivement le cercle en v et la droite qui porte Δ en w , de telle sorte que $\|\overrightarrow{v\tilde{w}}\| = d$. On montre alors que l'angle en w est le tiers de l'angle de Δ et Δ' .

4.2 Le théorème de l'arc capable



▷ L'angle qui, en un point d'un cercle, intercepte un arc de ce cercle est selon le cas, égal à la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc, ou à π moins cette moitié.

▷ Si un point décrit un arc de cercle ayant les mêmes extrémités qu'un segment donné, ce point intercepte le segment sous un angle constant.

▷ Le lieu des points interceptant un segment donné sous un angle fixe est égal à un arc de cercle ayant les mêmes extrémités que le segment.

4.3 Les isométries de \mathbb{R}^2

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$. On aura par conséquent $\|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$, où $g(u) = f(u) - f(0)$. Notons alors que

$$\begin{aligned} 2(g(u) | g(v)) &= \|g(u) - g(0)\|^2 + \|g(v) - g(0)\|^2 - \|g(u) - g(v)\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2(u | v), \end{aligned} \quad (21)$$

soit $(g(u) | g(v)) = (u | v)$. Si (e_1, e_2) forme une base orthonormale de \mathbb{R}^2 , il en sera donc de même de $(g(e_1), g(e_2))$, d'où

$$g(u) = \sum_{i=1,2} (g(u) | g(e_i)) g(e_i) = \sum_{i=1,2} (u | e_i) g(e_i), \quad (22)$$

et par conséquent, la linéarité de g . On a donc démontré que $f(u) = g(u) + f(0)$, où g est linéaire, soit encore que f est une application affine, somme d'une isométrie linéaire et d'une translation.

Notons \mathbb{G} la matrice de g dans une base de \mathbb{R}^2 , on aura

$$(\mathbb{G}u | \mathbb{G}v) = (u | v) = (\mathbb{G}u | \mathbb{G}v) = ({}^t\mathbb{G}\mathbb{G}u | v), \forall v, \quad (23)$$

d'où ${}^t\mathbb{G}\mathbb{G} = \mathbb{I}$. On en déduit en particulier que

$$1 = \det \mathbb{I} = \det {}^t\mathbb{G} \det \mathbb{G} = (\det \mathbb{G})^2, \text{ soit } \det \mathbb{G} = \pm 1. \quad (24)$$

Les isométries forment un groupe, au sein duquel, celles de déterminant 1, encore appelées rotations forment un sous-groupe, puisque $\det \mathbb{G}\mathbb{H} = \det \mathbb{G} \det \mathbb{H}$. Les isométries linéaires de déterminant -1 étant appelées symétries. Etudions la matrice d'une isométrie dans une base orthonormale, soit $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$. On aura $\sum_{i=1,2} (g_{ij})^2 = 1$ et $\sum_{i=1,2} g_{i1}g_{i2} = 0$, d'où $g_{11} = \cos \theta$ et $g_{21} = \sin \theta$; ainsi donc $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ dans le cas d'une rotation r , et $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ dans le cas d'une symétrie s .

4.4 Représentation dans le corps des complexes \mathbb{C}

Notons ψ la bijection canonique (ou affixe) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $\psi(u_1, u_2) = u_1 + iu_2$, et posons $\gamma = \psi \circ g \circ \psi^{-1}$ ainsi que $z = |z|e^{i\tau}$.

Dans le cas d'une rotation on aura $\rho = \psi \circ r \circ \psi^{-1}$

$$\rho(z) = |z|((\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau) + i(\sin \theta \cos \tau + \cos \theta \sin \tau)) = e^{i\theta}z, \quad (25)$$

c'est dire que dans le corps des complexes, la rotation d'angle θ est représentée par la multiplication par le complexe de module 1 et d'argument θ .

Dans le cas d'une symétrie, on aura

$$\sigma(z) = |z|((\cos \theta \cos \tau + \sin \theta \sin \tau) + i(\sin \theta \cos \tau - \cos \theta \sin \tau)) = e^{i\theta}\bar{z}, \quad (26)$$

d'où $e^{-i\theta/2}(\sigma(z) + z) = e^{i\theta/2}\bar{z} + e^{-i\theta/2}z$, ce qui prouve que $\sigma(z) + z$ est un multiple réel de $e^{i\theta/2}$, comme de plus

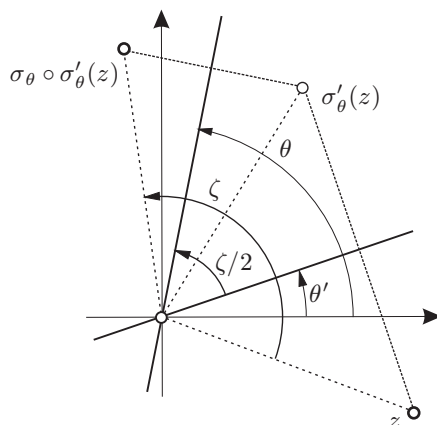
$$(s(u) - u | s(u) + u) = (s(u) | s(u)) - (u | u) = 0, \quad (27)$$

il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe d'angle $\theta/2$.

Remarquons que si σ_θ et $\sigma_{\theta'}$ sont les symétries relatives aux axes respectifs d'angle θ et θ' , on aura

$$\sigma_\theta \circ \sigma_{\theta'}(z) = \sigma_\theta(e^{i\theta'}\bar{z}) = e^{i\theta}e^{-i\theta'}z = e^{i(\theta-\theta')}z = \rho_{\theta-\theta'}(z). \quad (28)$$

C'est dire que la rotation d'angle ζ est la composée de deux symétries relatives à des axes dont l'angle est égal à $\zeta/2$.



4.5 Les isométries du plan affine \mathbb{P}

On dit que \mathbb{P} est un plan si il existe une application $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\forall A, B, C \in \mathbb{P}$, $\phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C)$, et $\forall A \in \mathbb{P}$ et $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\exists ! B \in \mathbb{P}$ tel que $\phi(A, B) = u$.

Il en résulte en particulier que $\phi(A, B) = \phi(A, A) + \phi(A, B)$, d'où $\phi(A, A) = 0$, ainsi que $\phi(B, A) = -\phi(A, B)$. On pourra donc noter $B = A + \phi(A, B)$, ou encore $\phi(A, B) = B - A$, notation plus parlante que le classique $\phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

On dira que $F : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ est une isométrie si $\forall A, B \in \mathbb{P}$, $\|F(B) - F(A)\| = \|B - A\|$. En particulier si on distingue une origine O dans le plan, on aura $\|F(A) - F(O)\| = \|A - O\|$, et on pourra poser $f(A - O) = F(A) - F(O)$. On aura alors

$$\|f(B - O) - f(A - O)\| = \|F(B) - F(A)\| = \|B - A\| = \|(B - O) - (A - O)\|. \quad (29)$$

L'application f est donc une isométrie de \mathbb{R}^2 qui vérifie $f(0) = 0$, d'où $f(A - O) = g(A - O)$, soit $F(A) - F(O) = g(A - O)$ ou encore $F(A) = g(A - O) + F(O)$.

L'application canonique $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se transporte aisément en une application $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $\Psi(A) = \psi(A - O)$, ce qui permet de dire qu'une isométrie \mathbb{P} se représente sous l'une des deux formes $\rho(z) = pz + q$ ou $\sigma(z) = p\bar{z} + q$, où $|p| = 1$.

Dans le premier cas, si $p = 1$ il s'agit d'une translation de q , et si $p \neq 1$, il s'agit d'une rotation d'angle $\theta = \arg p$ et de centre $t = q/(1 - p)$, on écrira également $\rho(z) = t + p(z - t)$.

Dans le second cas si $q = 2ire^{i\theta/2} = 2re^{i(\theta+\pi)/2}$, alors $\sigma(z) = p(\overline{z - s}) + s$ où $s = e^{i\theta/2}(ir + \lambda)$, et σ représente donc une symétrie par rapport à la droite d'équation $z = e^{i\theta/2}(ir + \lambda) = q/2 + \lambda e^{i\theta/2}$.

Notons enfin que si $\sigma(z) = p(\overline{z - s}) + s$ et $\sigma'(z) = p'(\overline{z - s}) + s$, alors $\sigma \circ \sigma'(z) = pp'(z - s) + s$, ce qui prouve que $\sigma \circ \sigma'$ n'est autre que la rotation de centre s et d'angle $\arg p - \arg p'$.

4.6 Factorisation

$$q = p_1^3 p_2^3 q_3 (1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 q_2 (1 + p_2 + p_2^2) + q_1 (1 + p_1 + p_1^2) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\mu \{(1 - p_1 p_2) t_{12} - p_1 (1 - p_2 p_3) t_{23} + p_1 p_2 (1 - p_3 p_1) t_{31}\} \\ q_2 &= -\mu \{(1 - p_2 p_3) t_{23} - p_2 (1 - p_3 p_1) t_{31} + p_2 p_3 (1 - p_1 p_2) t_{12}\} \\ q_3 &= -\mu \{(1 - p_3 p_1) t_{31} - p_3 (1 - p_1 p_2) t_{12} + p_3 p_1 (1 - p_2 p_3) t_{23}\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} q &= -\mu p_1^3 p_2^3 \{(1 - p_3 p_1) t_{31} - p_3 (1 - p_1 p_2) t_{12} + p_3 p_1 (1 - p_2 p_3) t_{23}\} (1 + p_3 + p_3^2) \\ &\quad - \mu p_1^3 \{(1 - p_2 p_3) t_{23} - p_2 (1 - p_3 p_1) t_{31} + p_2 p_3 (1 - p_1 p_2) t_{12}\} (1 + p_2 + p_2^2) \\ &\quad - \mu \{(1 - p_1 p_2) t_{12} - p_1 (1 - p_2 p_3) t_{23} + p_1 p_2 (1 - p_3 p_1) t_{31}\} (1 + p_1 + p_1^2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} q &= -\mu (1 - p_3 p_1) t_{31} \{p_1^3 p_2^3 (1 + p_3 + p_3^2) - p_1^3 p_2 (1 + p_2 + p_2^2) + p_1 p_2 (1 + p_1 + p_1^2)\} \\ &\quad - \mu (1 - p_1 p_2) t_{12} \{-p_1^3 p_2^3 p_3 (1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 p_2 p_3 (1 + p_2 + p_2^2) + (1 + p_1 + p_1^2)\} \\ &\quad - \mu (1 - p_2 p_3) t_{23} \{p_1^3 p_2^3 p_3 p_1 (1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 (1 + p_2 + p_2^2) - p_1 (1 + p_1 + p_1^2)\} \end{aligned} \quad (33)$$

On aura alors

$$q = -\mu \{(1 - p_1 p_2) t_{12} T_{12} + (1 - p_2 p_3) t_{23} T_{23} + (1 - p_3 p_1) t_{31} T_{31}\} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
T_{12} &= -p_1^3 p_2^3 p_3 (1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 p_2 p_3 (1 + p_2 + p_2^2) + (1 + p_1 + p_1^2) \\
T_{23} &= p_1^3 p_2^3 p_3 p_1 (1 + p_3 + p_3^2) + p_1^3 (1 + p_2 + p_2^2) - p_1 (1 + p_1 + p_1^2) \\
T_{31} &= p_1^3 p_2^3 (1 + p_3 + p_3^2) - p_1^3 p_2 (1 + p_2 + p_2^2) + p_1 p_2 (1 + p_1 + p_1^2)
\end{aligned} \tag{35}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
T_{12} &= -p_1^3 p_2^2 p_3 (p_2 + p_2 p_3) + p_1^3 p_2^2 p_3 (1 + p_2) + p_1 + p_1^2 + p_1^3 p_2 p_3 \\
&= p_1^3 p_2^2 p_3 (1 - p_2 p_3) + p_1 (1 + p_1 + p_1^2 p_2 p_3) \\
&= \mu p_1^2 p_2 (1 - p_2 p_3) + \mu p_1 (\mu^2 (1 + p_1) + p_1) \\
&= \mu p_1^2 p_2 (1 - p_2 p_3) + \mu p_1 (\mu^2 + p_1 (1 + \mu^2)) \\
&= \mu p_1^2 p_2 (1 - p_2 p_3) + \mu^2 p_1 (\mu - p_1) \\
&= \mu p_1^2 p_2 (1 - p_2 p_3) + \mu^2 p_1^2 (p_2 p_3 - 1) \\
&= \mu p_1^2 (1 - p_2 p_3) (p_2 - \mu) = \mu p_1^2 p_2 (1 - p_2 p_3) (1 - p_1 p_3)
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} &= p_1^3 p_2^3 p_3 p_1 (1 + p_3) + p_1^3 (p_2 + p_2^2) - p_1^2 \\
&= p_1^2 (p_1^2 p_2^3 p_3 (1 + p_3) + p_1 p_2^2 - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (p_1 p_2^2 (1 + p_1 p_2 p_3 (1 + p_3)) - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (p_1 p_2^2 (\mu^3 + \mu (1 + p_3)) - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (\mu p_1 p_2^2 (\mu^2 + 1 + p_3) - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (\mu p_1 p_2^2 (p_3 - \mu) - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (\mu p_1 p_2^2 p_3 (1 - p_1 p_2) - (1 - p_1 p_2)) \\
&= p_1^2 (1 - p_1 p_2) (\mu^2 p_2 - \mu^3) = \mu^2 p_1^2 p_2 (1 - p_1 p_2) (1 - p_1 p_3)
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
T_{31} &= p_1^3 p_2^3 (p_3 + p_3^2) - p_1^3 p_2^2 + p_1 p_2 (1 + p_1) \\
&= p_1^3 p_2^3 (p_3 + p_3^2) - p_1^3 p_2^2 + p_1 p_2 (1 + p_1) \\
&= \mu p_1^2 p_2^2 (1 + p_3) + p_1 p_2 + p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) \\
&= p_1 p_2 (1 + \mu p_1 a_2 (1 + p_3)) + p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) \\
&= \mu p_1 p_2 (\mu^2 + p_1 a_2 (1 + p_3)) + p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) \\
&= \mu p_1 p_2 (\mu^2 + \mu + p_1 a_2) + p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) \\
&= \mu p_1 p_2 (p_1 a_2 - 1) + p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) \\
&= (1 - p_1 a_2) (-\mu p_1 p_2 + p_1^2 p_2) = p_1^2 p_2 (1 - p_1 a_2) (1 - p_2 p_3)
\end{aligned} \tag{38}$$

soit donc

$$\begin{aligned}
q &= -\mu p_1^2 p_2 (1 - p_3 p_1) (1 - p_1 a_2) (1 - p_2 p_3) (\mu t_{12} + \mu^2 t_{23} + t_{31}) \\
&= -\mu p_1^2 p_2 (p_2 - \mu) (p_3 - \mu) (p_1 - \mu) (t_{12} + \mu t_{23} + \mu^2 t_{31})
\end{aligned} \tag{39}$$