

# Épreuve de TIPE – Partie D

## Titre : Pavages du plan

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

### Guide pour le candidat

Le dossier ci-joint comporte :

- Document principal : 12 pages
- Documents complémentaires : 1 page

### Travail suggéré au candidat :

Le document ci-joint comporte deux textes de sources différentes traitant d'un même sujet : les pavages du plan. L'un des textes est de nature plutôt didactique tandis que l'autre est plus formel. Il est vous est demandé de faire une synthèse des deux en montrant comment chacune des deux présentations complète l'autre. N'hésitez pas à faire toutes les figures nécessaires à une bonne compréhension du texte même si elles ne figurent pas dans le document.

### CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :

- Lisez le dossier en entier en un temps raisonnable.
- Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.
- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation.
- En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé. A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que tous les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

# 1 Texte A

## 1.1 Les pavages de Platon

Supposons que l'on veuille recouvrir le plan de carreaux ayant tous la même taille et la même forme : celle d'un polygone régulier de  $n$  côtés, les assemblages devront être identiques en chaque coin de chaque carreau. Il y a un assemblage de  $p$  polygones à chaque coin. Chaque carreau est un polygone de  $n$  côtés. L'angle de deux côtés consécutifs vaut  $\pi(n-2)/n$ . S'il y a  $p$  polygones assemblés en un coin, on doit donc avoir :

$$p\pi \frac{n-2}{n} = 2\pi \text{ soit } \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Les nombres  $p$  et  $n$  valent au moins 3.

– Pour  $p = 3$ ,  $n$  vaut donc 6

5 – et pour  $n = 3$ ,  $p$  vaut 6.

Ensuite, lorsque  $p$  et  $n$  dépassent 4, la relation ne peut plus être vérifiée par des nombres entiers, car  $1/p + 1/n$  est plus petit que  $1/2$ . Il n'existe donc que trois pavages vérifiant les conditions imposées :

– les carrés ( $p = 4$  et  $n = 4$ )

10 – les triangles équilatéraux ( $p = 6$  et  $n = 3$ )

– les hexagones réguliers ( $p = 3$  et  $n = 6$ )

## 1.2 Les pavages généraux

Les dessins auxquels nous nous intéressons, sous le nom de pavages, dans la suite, sont caractérisés par la propriété suivante : il existe deux translations  
15 indépendantes qui conserveraient le dessin si celui-ci était indéfiniment prolongé dans le plan tout entier. Ces deux translations définissent un parallélogramme de base. Pour chacun d'eux, vous pourriez dessiner sur un transparent la trame des isométries (voir Annexe) qui le conservent. Le résultat est le suivant : en mettant dans une même boîte les transparent sur lesquels figurent les mêmes  
20 isométries, on n'a besoin que de 17 boîtes pour les ranger tous. Les questions à poser sont les suivantes :

– le dessin est-il identique à son image dans un miroir ?

– Si oui, quel est le nombre de directions des axes de symétrie ? Nous  
25 donnons alors au type de pavage un nom commençant par  $M_i$  ( $i$  peut valoir 0, 1, 2, 3, 4 ou 6).

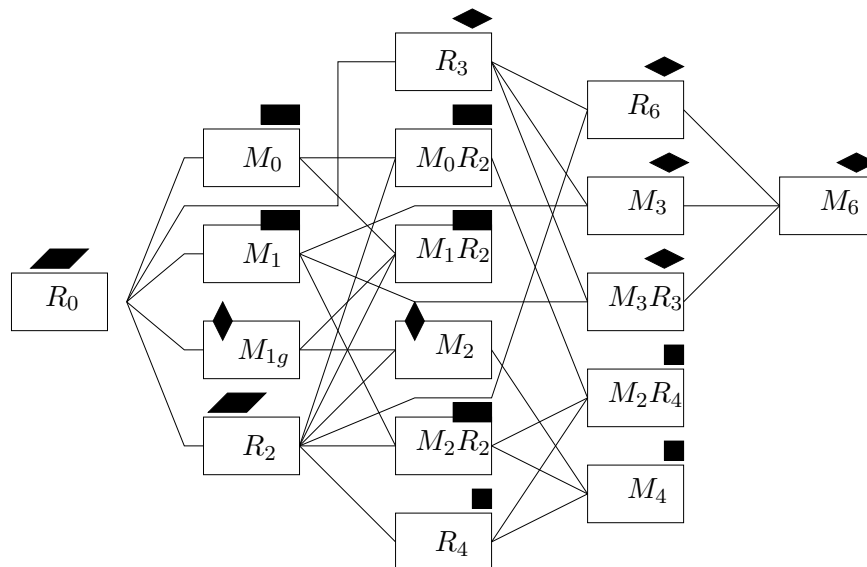
– Si non, y a-t-il des rotations qui le conservent ? Les plus « petites » de ces rotations sont-elles des demis, tiers, quarts ou sixièmes de tour ou l'identité ? Nous appellerons ces types  $R_2, R_3, R_4, R_6$  ou bien  $R_0$ .

– Observez alors s'il existe, entre les mailles de ces axes, des rotations conser-  
30 vant le dessin :

– S'il y en a, d'angle minimal  $1/j$ -tour, nous donnons à ce type le nom  $M_i R_j$  ( $j$  peut valoir 0, 2, 3, 4 ou 6).

- S’il n’y en pas, le nom est exactement  $M_j$  sauf pour  $M_0$  que nous appelons parfois  $M_{0g}$  (le zéro marque l’absence d’un axe de symétrie et le  $g$  marque la présence d’un glissement), et pour  $M_1$  qui se décline en  $M_{1g}$  ou  $M_1$ , selon la présence d’un glissement ou non.

Le tableau suivant reprend cet « algorithme » de reconnaissance.



Ce schéma montre comment les trames des 17 familles s’emboîtent les uns dans les autres et quelle est la forme de leur parallélogramme de base (quelconque, losange, rectangle carré, double triangle équilatéral).

La reconnaissance et le classement de ces 17 types de pavages n’est pas difficile si on se pose les bonnes questions que voici :

1. Repérer deux « plus petites » « translations indépendantes » qui le conservent.  
Note : De très nombreux couples de translations sont ainsi repérables et pourraient être promus au rang de « translations de base ».
2. Repérer les axes de symétrie (ou de glissements).
3. Repérer les centres de symétrie ou de rotation. S’il y a déjà des axes de symétrie, ne plus recherchez que ceux qui sont entre les mailles de ces axes.
4. Isoler un motif minimal du pavage.
5. Déterminer le groupe des isométries qui laissent le pavage invariant.

## 2 Texte B

Aussi bien le touriste visitant l'Alhambra à Grenade que l'artisan paveur est conduit à s'intéresser aux figures planes à motifs, répétées régulièrement et couvrant tout le plan. En fait, les motifs peuvent varier à l'infini mais il n'y a qu'un nombre fini de façons de les reproduire ; précisément 17 façons. Le but de ce paragraphe est de donner l'axiomatisation de ces « motifs répétés régulièrement » .

Pour simplifier nous supposons d'abord que le paveur déplace sa tuile mais sans la retourner, ou encore que ses tuiles sont décorées d'un seul côté.

Soit  $E$  le plan euclidien,  $P \subset E$  la partie représentant le pavé type ; il faut exprimer que  $P$  et ses déplacés remplissent tout le plan et sans trou, ce sera l'axiome GP 2 ci-dessous. Mais il est insuffisant pour n'obtenir que des pavages comme ceux de l'Alhambra. En effet il existe des pavages « non réguliers » du plan. Si l'on veut des pavages « réguliers » il faut introduire un groupe d'isométries de  $E$ , c'est l'axiome GP 1 ci-dessous.

**Définition 1.**  $E$  est un plan euclidien,  $P$  est un compact connexe de  $E$ , d'intérieur  $\overset{\circ}{P}$  non vide et  $G$  un sous-groupe du groupe  $Is_+(E)$  des isométries directes (déplacements) de  $E$ , vérifiant :

**GP 1**  $\bigcup_{g \in G} g(P) = E$ ,

**GP 2**  $g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \emptyset$  entraîne  $g(P) = h(P)$ .

**Théorème 1.** À une conjugaison près dans  $Is_+(E)$ , il y a cinq tels groupes  $G$ .

La démonstration est basée sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 1.** Le groupe  $G$  opère discrètement dans  $E$ . Ceci signifie que l'orbite  $G(a)$  d'un point  $a$  quelconque, c'est-à-dire l'ensemble

$$G(a) = \{g(a), g \in G\},$$

est constituée de points isolées : pour tout  $b \in G(a)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le disque  $B(b, \varepsilon)$  de centre  $b$  et de rayon  $\varepsilon$  est tel que

$$B(b, \varepsilon) \cap G(a) = \{b\}.$$

En particulier dans un compact de  $E$ , toute orbite n'aura qu'un nombre fini de points, car un ensemble discret compact est fini.

Le deuxième point clé est de montrer que les translations pures de  $G$  se déduisent toutes de deux d'entre elles.

**Lemme 2.** Soit  $\Gamma = G \cap T(E)$ , où  $T(E)$  est le groupe des translations de  $E$ . Il existe deux vecteurs non colinéaires  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  tel que le groupe  $\Gamma$  soit exactement l'ensemble des translations de vecteurs parcourant  $\mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ .

*Démonstration.* Montrons par l'absurde que  $\Gamma$  contient au moins deux translations de vecteurs directeurs linéairement indépendants. Supposons d'abord que  $\Gamma = \text{Id}_E$ ,  $G$  ne contient alors que des rotations. Si deux de ces rotations  $r$  et  $s$  étaient de centres distincts alors  $rsr^{-1}s^{-1}$  serait une translation différente de l'identité. Par conséquent toutes les rotations ont même centre, noté  $\omega$ . Dans ces conditions  $\cup_{g \in G} g(P)$  est contenu dans un disque de centre  $\omega$ , contredisant ainsi GP 1.

Supposons ensuite que toutes les directions soient parallèles. Soit  $r$  une rotation de  $G$  et  $t \in \Gamma$  une translation de vecteur  $\vec{\xi}$ . L'isométrie  $rtr^{-1}$  est la translation de vecteur  $r(\vec{\xi})$ . Comme  $r(\vec{\xi})$  est parallèle à  $\xi$ ,  $r$  est nécessairement une symétrie ponctuelle. Toutes les rotation de  $G \setminus \Gamma$  sont donc des symétries ponctuelles. Soient  $r$  et  $r'$  deux éléments de  $G \setminus \Gamma$  de centre respectifs  $a$  et  $a'$ , leur composition  $rr'$  est une translation de vecteur  $2\vec{aa}'$ . Il en résulte que tous les centres de rotation doivent être alignés sur une droite  $D$  parallèle à la direction de translation. Par conséquent,  $\cup_{g \in G} g(P)$  est contenu dans une bande d'axe  $D$ , contredisant encore GP 1.

On sait maintenant que  $\Gamma$  contient au moins deux translations de vecteurs directeurs non liés, notés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Comme  $\Gamma$  est un groupe, il est clair que

$$\{\text{translations } \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}\} \subset \Gamma. \quad (1)$$

Il reste à voir que l'on a égalité. D'après le lemme 1, on peut trouver une translation de vecteur  $\vec{u}$  de plus petite norme  $\|\vec{u}\|$  dans  $\Gamma$  puis un  $\vec{v} \notin \mathbf{Z}\vec{u}$  de plus petite norme pour  $\Gamma$ . Montrons que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont les vecteurs recherchés. Soit  $Q$  le parallélogramme

$$Q = \{a + t\vec{u} + s\vec{v}, (t, s) \in [0, 1]^2\}$$

de sommet  $a$  quelconque fixé. En vertu de (1) pour nos candidats  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , les  $g(Q)$  pour  $g$  parcourant  $\Gamma$  remplissent tout  $E$ . Tout point de l'orbite de  $a$  sous  $\Gamma$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\{g(a), g \in \Gamma\}$ , qui ne serait dans  $a + \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$  donnerait naissance à un point  $y$  de cet orbite situé à l'intérieur de l'un des translatés de  $Q$ . Dans ces conditions,  $y$  serait alors à une distance strictement inférieure à  $\|\vec{u}\|$  ou  $\|\vec{v}\|$  de l'un des sommets de ce translaté de  $Q$ . Par conséquent, il existerait dans  $\Gamma$  une translation de vecteur de norme strictement inférieure à  $\min(\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|)$ , ce qui contredit le choix de ces vecteurs.  $\square$

Regardons maintenant les rotations de  $G$ . On appelle ordre d'une rotation  $r$ , le plus entier  $k$  tel que  $r^k = \text{Id}$ .

**Lemme 3.** *Soit  $r \in G' = G \setminus \Gamma$ , alors  $r$  est une rotation d'angle  $2\pi n/k$  avec  $k$  et  $n$  entiers.*

*Démonstration.* Notons d'abord que s'il existe  $n$  et  $m$  distincts ( $n > m$ ) tels que  $r^n(P) = r^m(P)$  alors  $r^{n-m} = \text{Id}$  et  $r$  est d'ordre au plus égal à  $n - m$ . Soit  $r$  une rotation de  $G'$  d'ordre infini, en vertu de GP 2 et de ce qui précède,  $r^n(P)$  et  $r^m(P)$  sont disjoints pour tout  $n$  et  $m$ .  $P$  est compact et  $r$  est une

isométrie donc la réunion des  $r^n(P)$  pour  $n$  variant de 0 à l'infini est un ensemble borné. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \overset{\circ}{P}$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{P}$ . On peut extraire de la suite  $\{r^n(x), n \in \mathbf{N}\}$ , une suite convergente. Il existe donc un rang à partir duquel, en vertu du critère de Cauchy,

$$\|r^{n_k}(x) - r^{n_{k+1}}(x)\| < \varepsilon.$$

Par conséquent,  $r^{n_k}(\overset{\circ}{P})$  et  $r^{n_{k+1}}(\overset{\circ}{P})$  sont d'intersection non vide, ce qui est  
 110 contradictoire avec l'hypothèse.

Une rotation d'angle  $\theta$  est d'ordre fini  $k$  ssi il existe un entier  $n$  tel que  $k\theta = 2n\pi$ , d'où le résultat annoncé.  $\square$

*Preuve du théorème 1.* Le cas où  $G'$  ne contient que des rotations d'ordre deux, c'est-à-dire des symétries ponctuelles, s'étudie facilement. Si  $G = \Gamma$ , c'est le  
 115 groupe de la figure 1 gauche. S'il contient vraiment des rotations d'ordre deux, c'est le groupe de la figure 1 droite.

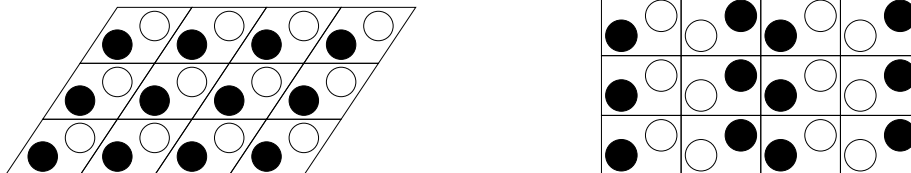


FIG. 1 – À gauche : 2 translations. À droite : 2 translations, 1 symétrie ponctuelle.

Supposons maintenant que  $r$  soit un élément de  $G'$ , d'ordre  $\alpha \geq 3$  et d'angle  $2\pi/\alpha$ , ce qui est toujours possible, quitte à considérer des itérés de  $r$ . Soit  $a$  le centre de  $r$ . Soit  $b$  un centre de rotation de  $G'$ , distinct de  $a$  et le plus près  
 120 possible de  $a$ . Soit  $s$  une rotation de centre  $b$  et d'ordre  $\beta \geq 3$ , d'angle  $2\pi/\beta$ . Posons  $t = (rs)^{-1}$ , les rappels sur les isométries montrent que le centre  $c$  de  $t$  est tel que le triangle  $a, b, c$  ait des angles moitiés de ceux de  $r, s, t$ , voir figures 2 et 3. Montrons maintenant que le choix de  $b$  implique que si l'on désigne par  $\gamma$  l'ordre de  $t$ , alors l'angle de  $t$  est  $2\pi/\gamma$ . Si  $t$  est d'angle  $2\pi n/\gamma$ ,  $n \geq 2$ , quitte  
 125 à itérer  $t$ , ( $p.p.c.m.(n, \gamma)/n$  fois) il existe  $t'$  dans  $G'$ , une rotation de centre  $c$  et d'angle  $2\pi/\gamma$ . Comme  $(rt')^{-1} \in G'$ , et possède un centre  $a'$  plus proche de  $a$  que  $b$ , on aboutit à une contradiction.

Comme la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ , on a

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

Comme  $\alpha, \beta$  sont des entiers supérieurs à 3, les seules possibilités sont données par le tableau 1.

130 On termine en montrant que les cas I, II et III sont nécessairement ceux associés respectivement aux figures 4, 5, 6.

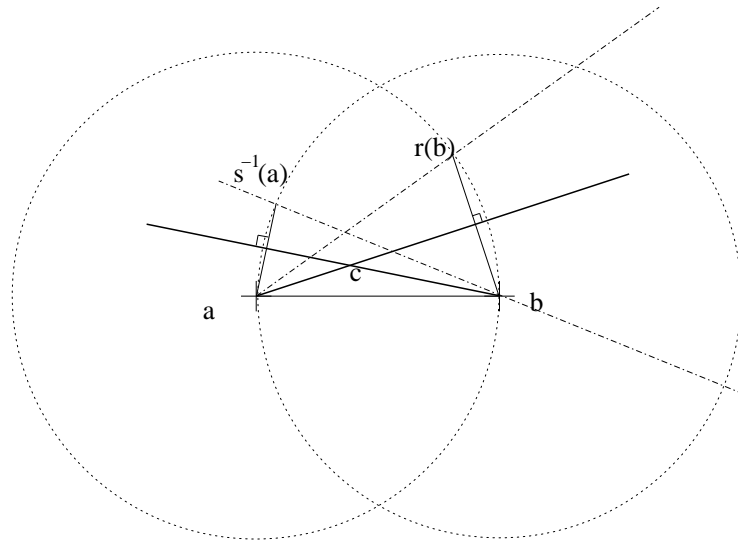


FIG. 2 – Composée de deux rotations

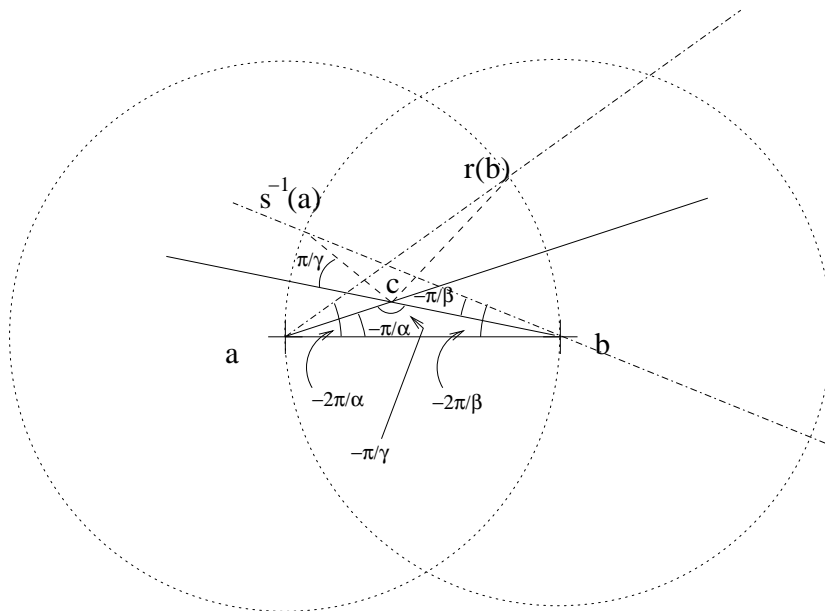


FIG. 3 – Triangle  $(a, b, c)$

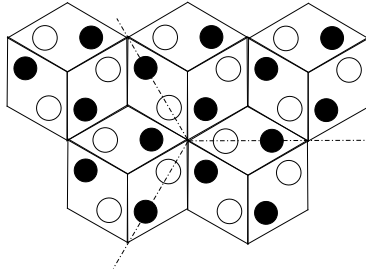


FIG. 4 – 2 translations, 1 rotation d'angle  $2\pi/3$ .

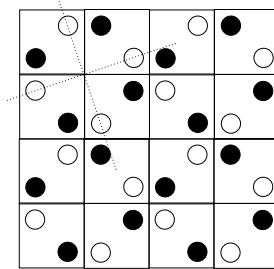


FIG. 5 – 2 translations, 1 rotation d'angle  $2\pi/4 = \pi/2$ .

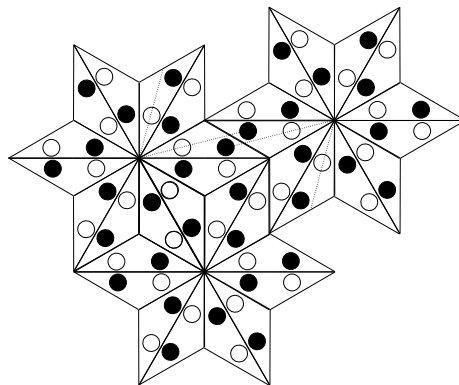


FIG. 6 – 2 translations, 1 rotation d'angle  $2\pi/6 = \pi/3$ .



	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
cas I	$1/3$	$1/3$	$1/3$
cas II	$1/4$	$1/4$	$1/2$
cas III	$1/6$	$1/3$	$1/2$

TAB. 1 – Valeurs possibles des triplets  $(\alpha, \beta, \gamma)$

Si maintenant, on étudie le même problème mais en remplaçant  $Is^+(E)$  par  $Is(E)$ , c'est-à-dire que le motif doit être décoré sur ses deux faces, l'étude précédente reste valable mais la recherche de  $G$  est un peu plus compliquée. On trouve douze groupes supplémentaires.  $\square$

## 2.1 Conventions

Dans les dessins qui suivent, on a adopté les conventions suivantes :

- Double trait pour l'axe d'une réflexion,
- Tiret pour l'axe d'une symétrie glissée (glissage),
- Losange pour représenter le centre d'une rotation d'ordre 2,
- Triangle pour représenter le centre d'une rotation d'ordre 3,
- Carré pour représenter le centre d'une rotation d'ordre 4,
- Hexagone pour représenter le centre d'une rotation d'ordre 6.

## 2.2 Notations

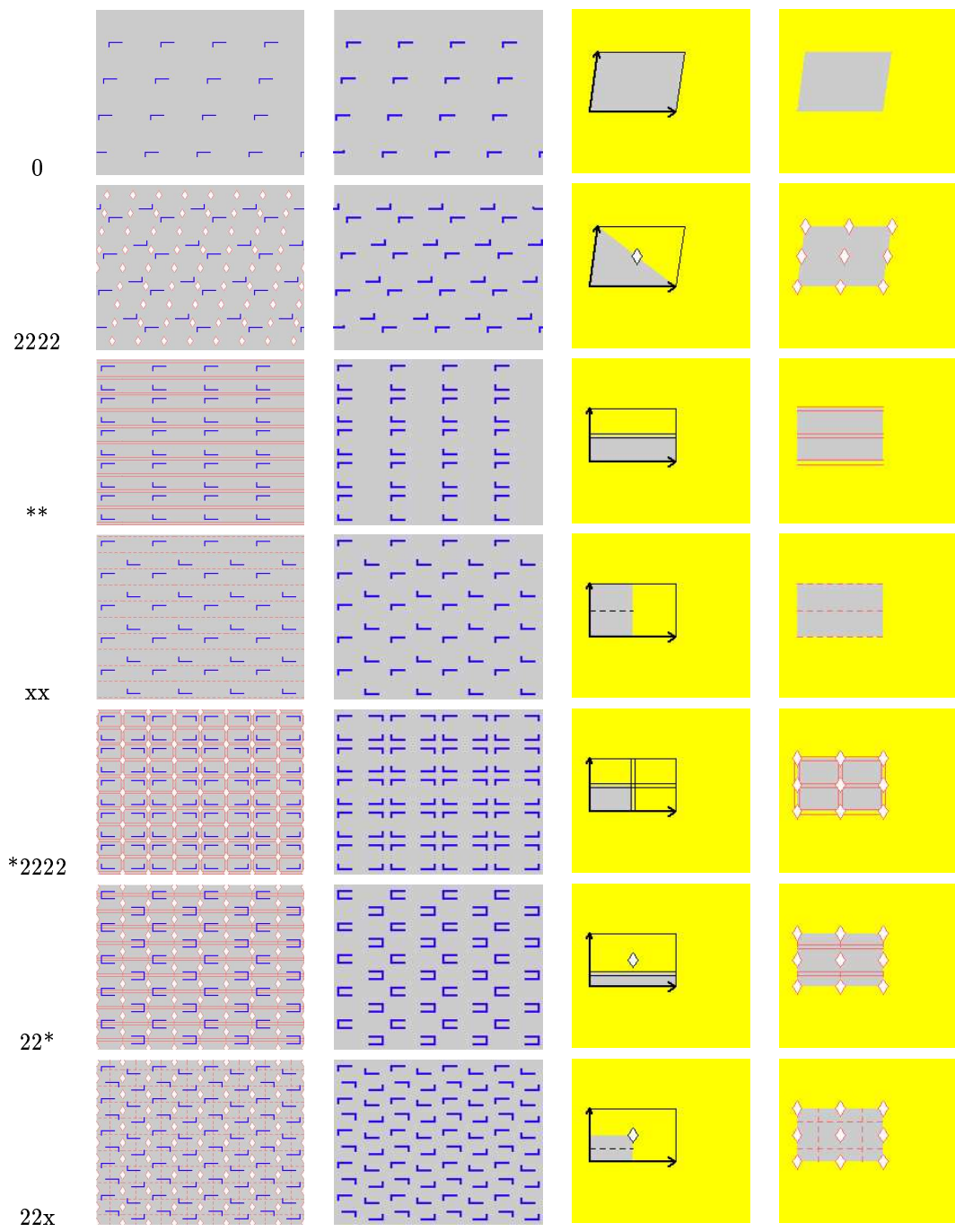
Les groupes de chaque pavage sont décrits par leur générateur suivant un système de notation dû à W.Thurston. Pour fixer les idées, les 17 groupes admissibles sont les suivants :

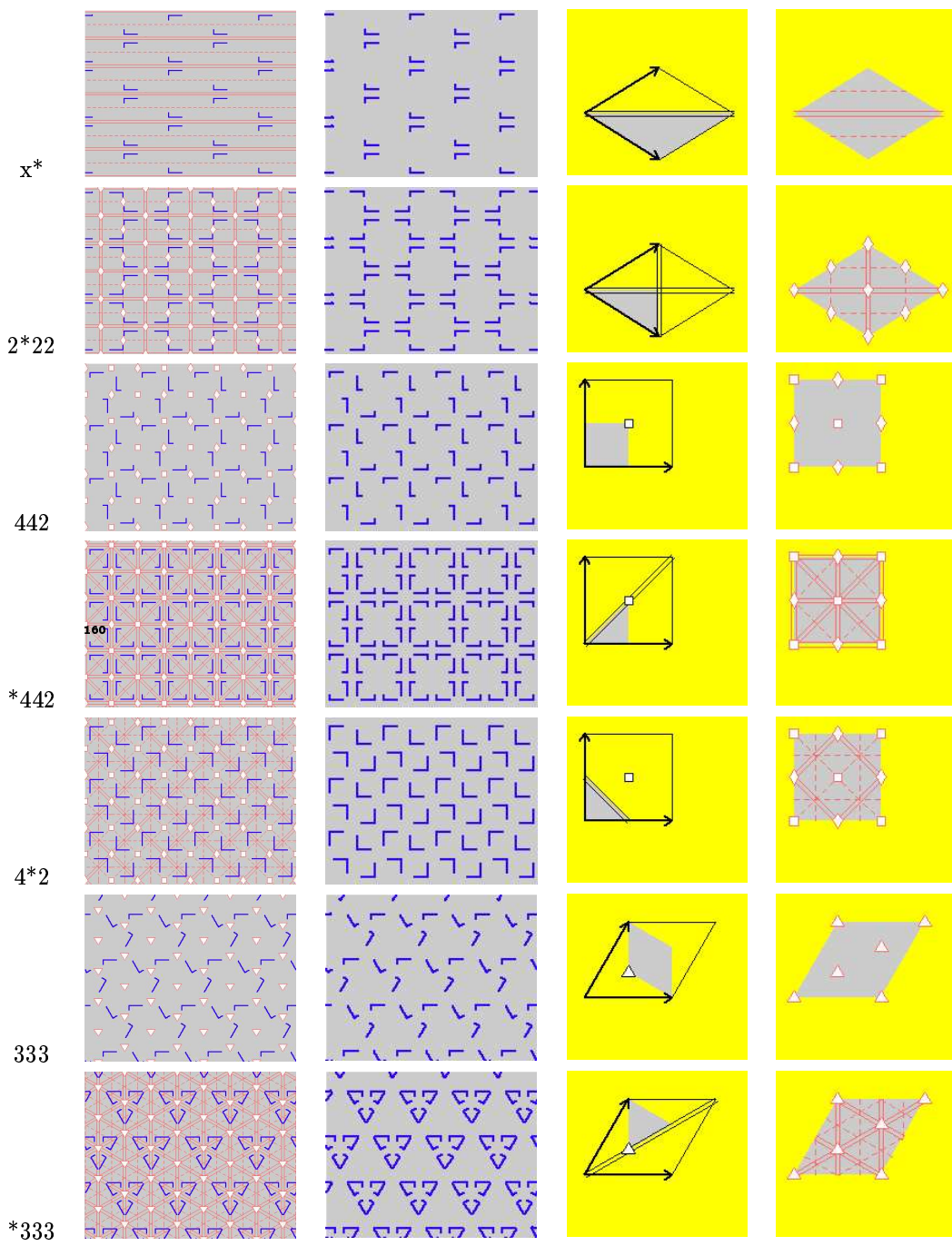
o, 2222, \*\*, xx, \*2222, 22\*, 22x, x\*, 2\*22  
442, \*442, 4\*2, 333, \*333, 3\*3, 632, \*632

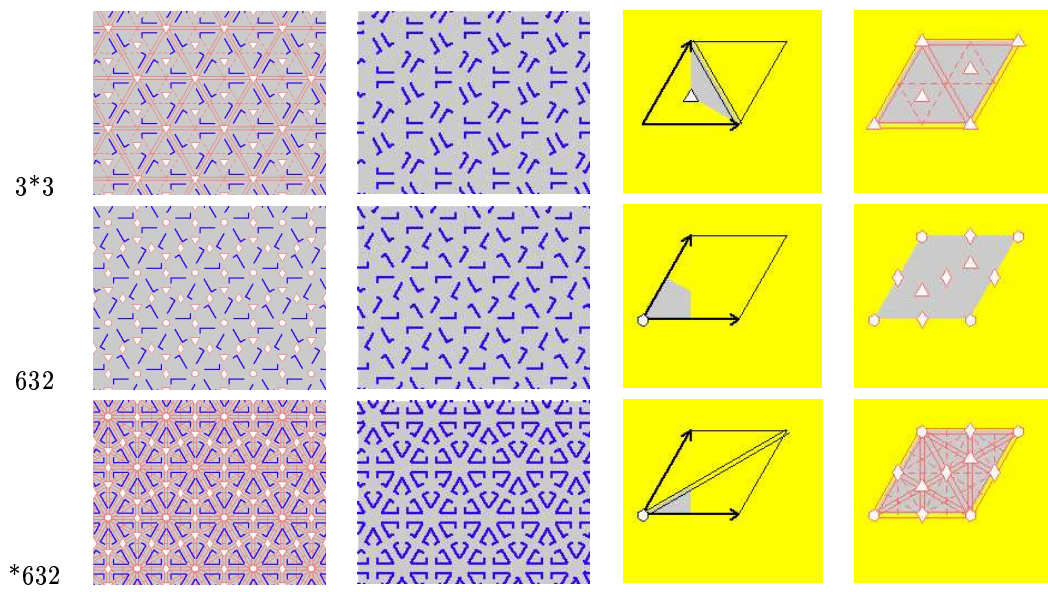
- Un entier  $n$  indique la présence d'une rotation d'angle  $2\pi/n$ .
- Un astérisque \*, indique la présence d'une symétrie.
- Une croix x, indique la présence d'un glissage.

Par exemple, le groupe 442 est engendrée par deux rotations distinctes d'ordre 4 et une rotation d'angle  $\pi$ , c'est-à-dire une symétrie ponctuelle.

Si les nombres viennent après l'astérisque, cela signifie que les centres des rotations correspondantes sont sur les lignes de symétrie. Le groupe \*442 a toutes ses rotations centrées sur la ligne de symétrie. Pour le groupe 4\*2, seule la symétrie ponctuelle a son centre sur la ligne de symétrie.







## Annexe : Les isométries du plan

- Les transformations affines du plan qui ne changent ni la forme ni les mesures des objets sont appelées isométries ( du grec iso [même ] et metron [mesure]).
- 165 Ces transformations ont des propriétés simples mais importantes : leur
- Leur ensemble forme un groupe pour la loi de composition,
  - toutes les isométries du plan sont de 4 types : translation, réflexion, rotation, glissement. Cette dernière transformation est une translation suivie ou précédée d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation. On
  - 170 l'appelle aussi « vissage ». Le demi-tour est appelé aussi symétrie centrale.
  - La composée de deux symétries axiales est une translation ou une rotation.
  - Une symétrie axiale change l'orientation des cercles. On dit que la symétrie axiale est une isométrie indirecte (ou anti-déplacement).
  - Une composée de deux symétries axiales ne change donc pas l'orientation : les translations et les rotations conservent donc l'orientation (on les
  - 175 appelle isométries directes ou déplacements). On note  $\text{Is}_+(E)$  le groupe des isométries directes du plan et  $\text{Is}(E)$  le groupe des isométries du plan euclidien  $E$ .
  - Les composées de rotations et/ou de translations équivalent à une seule rotation ou translation ; une composée de quatre symétries axiales équivaut donc à une composée de deux seulement. Une composée de trois symétries axiales change l'orientation et équivaut à la composée d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur « parallèle » à l'axe de la symétrie (c'est un glissement).
  - 180 – Finalement : les symétries axiales « engendrent » toutes les isométries du plan.
  - Une isométrie du plan euclidien est entièrement déterminée par la donnée de l'image de deux points distincts. Soit  $a, b, a', b'$ , tels que  $\|\overrightarrow{a-b}\| = \|\overrightarrow{a'-b'}\|$ . Si l'isométrie cherchée est une translation alors le vecteur est
  - 185 forcément  $\overrightarrow{aa'}$ . Si c'est une rotation, le centre en est nécessairement l'intersection des médiatrices de  $[a, a']$  et  $[b, b']$ . (voir figure 2).
  - 190