EPREUVE COMMUNE DE TIPE - PARTIE D

Titre :

Le produit thalésien des scalaires en géométrie plane

Temps de présentation : 2h15mn
Temps de présentation devant le jury : .... 10 mn
Entretien avec le jury : .... 10 mn

Guide pour le candidat :

Le dossier ci-joint comporte au total : 11 pages
Document principal : 10 pages

Travail **suggéré** au candidat : Le candidat s'attachera à comprendre :
1) le choix d'un corps pythagoricien, respectivement euclidien, pour telle ou telle géométrie, en liaison avec les critères de constructibilité définies en 1.3 (cf. la note 2, page 10).
2) " le choix géométrique " du produit thalésien des scalaires comme loi multiplicative du corps - appelée ici jauge des scalaires -.
Il est demandé au candidat de dégager les avantages de cette présentation géométrique de la géométrie euclidienne plane standard.

Conseils généraux pour la préparation de l'épreuve :

• Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
• Réserver du temps pour préparer l'exposé devant le jury.
- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper, mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendants la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débuter votre exposé.
- A la fin d'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

Le produit thalésien des scalaires
en géométrie plane

1 Introduction

1.1 Quelques définitions

Les idées contemporaines des chercheurs sur les fondements de la géométrie s'inspirent profondément du célèbre ouvrage de David Hilbert : "Grundlagen der Geometrie" (1899). Depuis cette époque, plusieurs approches de la géométrie plane euclidienne ont été proposées et des simplifications ont été apportées aux démonstrations initiales de Hilbert et l'évolution des conceptions concernant la théorie des ensembles a considérablement retenti sur la géométrie. De tous ces travaux, il se dégage quelques principes se rapportant notamment aux *corps ordonnés* dont la géométrie a le plus grand besoin pour se fonder rigoureusement.

L'opération de multiplication dans un tel corps de scalaires jaugeant un plan euclidien peut alors se redéfinir au moyen de la construction de Thalès : d'où son nom de produit thalésien.

Rappelons qu'un corps ordonné est un corps commutatif muni d'un ordre total[1] **vérifiant, pour des scalaires** x, y, z **quelconques, les deux conditions :** $x \leq y \Rightarrow x + y \leq y + z$ **;** $x \geq 0$ **et** $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$**.**

Le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un premier exemple (simple) de corps ordonné que l'on rencontre en classe de spéciales. On peut montrer que tous les corps ordonnés minimaux sont isomorphes à $\mathbf{Q}$. Ils s'avèrent insuffisants en géométrie plane en vertu du théorème de Pythagore : ce théorème implique que, si x et y sont des scalaires de notre géométrie, alors $\sqrt{x^2 + y^2}$ doit être aussi un scalaire de cette géométrie.

Or, pour $x = y = 1$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ est connu depuis l'antiquité.

La géométrie plane euclidienne exige donc, tout d'abord, un corps ordonné dans lequel toute somme de carrés soit encore un carré.

Un corps commutatif K ***est, ainsi, dit pythagoricien si quels que soient*** $x \in K$ ***et*** $y \in K$***, il existe*** $z \in K$ ***tel que*** $z^2 = x^2 + y^2$***.***

On peut montrer que tous les corps ordonnés pythagoriciens minimaux sont isomorphes et si $\mathbf{P}$ désigne l'un d'eux, on peut également justifier $\sqrt[4]{2} \notin \mathbf{P}$ alors que $\sqrt{2} \in \mathbf{P}$.

Ainsi, définit-on un corps euclidien ou quadratiquement clos comme tout corps

[1] Voir les rappels donnés en fin de texte.

ordonné K vérifiant la propriété suivante : quelque soit $x \in K$ tel que $x \geq 0$, il existe $z \in K$ tel que $z^2 = x$.

Tout corps ordonné euclidien est évidemment pythagoricien ; par contre, le corps ordonné pythagoricien minimal $\mathbf{P}$ n'est pas euclidien.

1.2 Le modèle analytique de la géométrie plane

Étant donné un corps ordonné pythagoricien K, on peut prendre comme modèle d'un "plan" l'ensemble K^2 des couples $M = (x, y)$ d'éléments de K muni de la fonction "distance" δ définie par la formule :

$$\delta(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1.3 Les critères de constructibilité

a) Points constructibles

Dans la géométrie plane classique, on construit d'abord arbitrairement deux points distincts S et A dont la distance fixe le scalaire unité $u = \delta(S, A)$. Il est commode de prendre $\overrightarrow{SA}$ comme vecteur unitaire d'un axe S_α et de rapporter les points du plan à un repère $S_{\alpha\beta}$.

Les points constructibles s'obtiennent de proche en proche (à partir de S et A) au moyen d'un nombre fini d'*éléments accessibles* : droites, segments, cercles. Si deux points M et N sont constructibles et si leur distance est $\delta(M, N) = x$, on dit également que x et $-x$ sont des *scalaires constructibles.*

Si M et N sont des points constructibles distincts et D une droite accessible passant par M, on peut utiliser, selon les cas,

(α) la *règle* ou un *pliage de première espèce*, pour accéder à la droite MN ;

(β) un *pliage de seconde espèce*, pour accéder aux deux bisectrices, issues de M, des droites MN et D.

(γ) le *transporteur de distance* pour accéder aux deux segments $[M, N_1]$ et $[M, N_2]$ de D tels que $\delta(M, N) = \delta(M, N_1) = \delta(M, N_2)$.

(δ) le *compas*, pour accéder au cercle de centre M, passant par N.

On peut alors définir trois procédés classiques de construction utilisant chacun deux règles d'accesibilité :

($\alpha - \beta$) Un point constructible "*par pliages*" est à l'intersection de deux droites accessibles sécantes.

$(\alpha-\gamma)$ Un point constructible "*par la règle et le transporteur de distance*" est à l'intersection de deux droites accessibles sécantes ou à l'extrêmité d'un segment accessible.
$(\alpha-\delta)$ Un point constructible "*par la règle et le compas*" est à l'intersection de deux éléments accessibles (droites ou cercles) sécants .

b) Revenons briévement sur *les définitions du corps pythagoricien minimum P et du corps euclidien minimum L.*
Soit H un sous-corps d'un corps K pythagoricien (resp. euclidien). Dans l'ensemble $\mathcal{H}$, ordonné par inclusion, des sous-corps pythagoriciens (resp. euclidiens) J de K tels que $H \subset J$, il existe un plus petit élément I : le corps I est l'intersection des ensembles de $\mathcal{H}$. On peut dire que I est l'extension pythagoricienne (resp. euclidienne) de H dans K.
Si le corps K est euclidien, on peut introduire simultanément pour un sous-corps H de K, l'extension pythagoricienne I_1 et l'extension euclidienne I_2 qui vérifient : $H \subset I_1 \subset I_2$.
Par exemple, le corps $\mathbf{R}$ des réels contient un sous-corps pythagoricien minimum P et un sous-corps euclidien minimum L, comme déjà dit : on peut dire que P et L sont les extensions pythagoricienne et euclidienne du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels.

c) Les critères de constructibilité
On peut montrer les résultats suivants :
C_1) Le corps P représente l'ensemble des scalaires constructibles par pliages. Il représente aussi l'ensemble des scalaires constructibles par la règle et le transporteur de distance.
Pour qu'un point de coordonnées (x, y) soit constructible par l'un de ces deux procédés, il faut et il suffit que $(x, y) \in P \times P$.
C_2) Le corps L représente l'ensemble des scalaires constructibles par la règle et le compas.
Pour qu'un point de coordonnées (x, y) soit constructible par ce procédé, il faut et il suffit que $(x, y) \in L \times L$.

2 Le produit thalésien des scalaires

Afin de justifier la "consistance" (non contradiction relative) de la géométrie plane euclidienne et de réfléchir sur l'affirmation peut-être péremptoire selon laquelle le corps des réels serait "indispensable" à l'édification de la géométrie, *il convient de revenir sur l'étude de la structure algébrique de l'ensemble des scalaires constructibles : que l'on appellera dans ce qui suit "la jauge scalaire".*

Étant donné un plan euclidien E jaugé par un ensemble G de scalaires, portons exclusivement notre attention sur la structure (α, θ) de groupe (additif) ordonné dont est naturellement muni G : α est l'opération d'addition (dans G) et θ est la relation d'ordre total (dans G). Introduisons la définition suivante :

Définition

Dans E, soit $r = (\Delta_1, \Delta_2)$ un repère (couple d'axes ayant même origine, de supports distincts). Pour $u \in G, u > 0, x \in G, y \in G$, définissons le scalaire $z = \mu(u)(r)(x, y)$ (produit thalésien de x et y, dans le repère r, pour l'unité u) de la manière suivante : la droite joignant les points $(u, 0)$ et $(0, x)$ admet comme parallèle une droite passant par les points $(y, 0)$ et $(0, z)$. (Fig. 1) A chaque couple

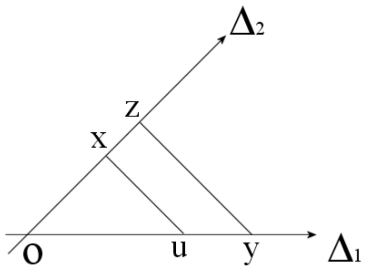

FIG. 1 –

(u, r) (formé d'un scalaire $u > 0$ et d'un repère r du plan) est ainsi associée une opération interne $\mu(u)(r)$ dans G, selon laquelle : $(x, y) \mapsto z$ (quand x, y parcourent G). On dit que $\mu(u)(r)$ est ***la multiplication thalésienne d'unité u, relative au repère r.***

Dès lors, voici le théorème fondamental qui doit se substituer à l'énoncé de Thalès :

"***Soit E un plan euclidien de jauge G, et soit u un élément strictement positif de G.***

1) Toutes les multiplications thalésiennes $\mu(u)(r)$ (dans G) sont identiques : elles ne dépendent pas du repère r et (par l'abus d'écriture habituel) on peut désigner pas $\mu(u)$ la valeur constante de la fonction $r \mapsto \mu(u)(r)$.

2) La structure $(\alpha, \mu(u), \theta)$ de support G (d'addition α, de multiplication $\mu(u)$, d'ordre θ) est une structure de corps ordonné quadratiquement clos, d'unité u."

Si, dès le départ de l'axiomatique, la jauge scalaire G est munie d'une structure $(\alpha, \lambda, \theta)$ de corps ordonné quadratiquement clos d'unité u, et si - pour la multiplication λ - l'énoncé de Thalès est pris comme axiome (l'enseignement classique de la gomtrie se fait en prenant

$G = \mathbf{R}$ et $u = 1$), alors la démonstration du théorème sur la multiplication thalésienne se réduit à fort peu de choses. L'énoncé de Thalès donné : $\mu(u)(r) = \lambda$ quel que soit le repère r de E. Pour une autre unité v, posons (pour abréger) :

$$\mu(u)(r)(x, y) = x \top y, \mu(v)(r)(x, y) = x \perp y, \text{ et } u = v \top w$$

(w est donc l'inverse de v au sens de la multiplication initiale λ). On démontre alors la formule : $x \perp y = w \top (x \top y)$.

Ainsi, pour chaque unité v (fixée dans G), la fonction $r \mapsto \mu(v)(r)$ est bien une constante.

Mais, ici, nous allons nous intéresser à une axiomatique aux prémisses plus légères, et le théorème sur la multiplication thalésienne n'y sera pas "escamoté" par un axiome fort. Au départ, on suppose que la jauge scalaire G est seulement munie d'une structure (α, θ) de groupe (additif) totalement ordonné, non réduit à $\{0\}$. Cette structure est suffisante dans la première partie du développement de la géométrie plane euclidienne, partie qu'on peut appeler la géométrie *additive*, comprenant notamment les rubriques suivantes : isométries (symétries, translations, rotations), parallélogrammes, repères et projections, orthogonalité (et théorème de l'orthocentre), théorie des angles, condition angulaire de cocyclicité de 4 points. *C'est à propos du théorème de Thalès qu'on aborde pour la première fois la géométrie multiplicative, et il faut remarquer que ce théorème est précédé par un lemme qui appartient à la géométrie additive :*

"***Dans le plan euclidien*** E***, soit*** f ***une projection sur une droite*** D ***(parallèlement à une direction*** Δ***). Si*** M ***est le milieu de 2 points*** A ***et*** B ***de*** E***, alors*** $f(M)$ ***est le milieu des points*** $f(A)$ ***et*** $f(B)$" (lemme de Thalès)

Ayant choisi dans G un élément $u > 0$, destiné à servir d'unité, on considère tout d'abord les multiplications thalésiennes $\mu(u)(r)$ associées aux repères *orthogonaux* $r = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E. Ces opérations sont identiques, en raison de l'isométrie permettant de passer d'un repère orthogonal à un autre repère orthogonal. **Pour abréger, nous noterons dans ce qui va suivre :** $ax = \mu(u)(r)(a, x)$**, produit thalésien relatif à un repère orthogonal** r.

Dans la définition du produit thalésien ax, il est clair que a et x jouent des rôles différents : déjà se pose la question de la commutativité ($ax = xa$?) (Fig. 2).

De la définition découle aussitôt l'équation d'une droite : d'abord d'une droite passant par l'origine et le point (u, a) (équation $y = ax$), puis par translation celle d'une droite passant par les points $(0, b)$ et $(u, a + b)$ (équation $y = ax + b$).

Il reste à étudier les propriétés de cette multiplication thalésienne.

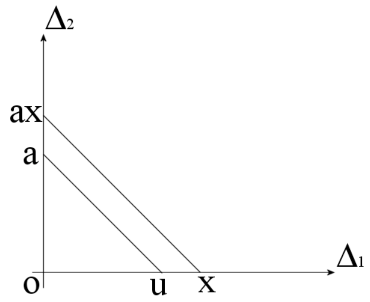

FIG. 2 –

1) u joue bien le rôle d'*élément neutre* à droite ($au = a$) et à gauche ($ua = a$).

2) Tout scalaire $a \neq 0$ est *régulier* :

- à gauche : $ax = ay \Rightarrow x = y$,
- à droite : $xa = ya \Rightarrow x = y$.

Corollairement : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (faire les figures correspondantes).

3) Le produit de deux scalaires *positifs* est *positifs*. La règle des signes $(-a)x = a(-x) = -(ax)$ résulte de petites symétries.

4) Tout scalaire $a \neq 0$ admet un *inverse unique*.

Étant donné deux droites D, D' d'équations respectives $y = ax + b, y = a'x + b'$, on observe aisément les critères de *parallélisme* ($D \| D' \Leftrightarrow a = a'$) et d'*orthogonalité* ($D \perp D' \Leftrightarrow aa' = -u$).

(La figure 3 met en evidence le point $(a^{-1}, 0)$. Une rotation de centre O, d'amplitude -90^o, en déduit le point $(0, -a^{-1})$, d'où le critère d'orthogonalité.)

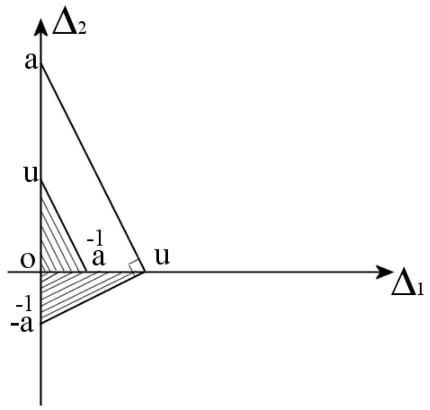

FIG. 3 –

5) *Distributivité à droite* : on commence par établir $a(d+d) = ad + ad$ en utilisant le lemme de Thalès, et on en déduit plus généralement $a(x+y) = ax + ay$ en notant d la moyenne de x et de y.

6) Mais la *commutativité* ne s'obtient pas si facilement. Voyons à quelle figure géométrique correspond la propriété $ab = ba$ (Fig. 4). C'est un cas particulier de la figure suivante (avec A, B, C sur Δ_1 et A', B', C' sur Δ_2, ces points étant distincts de l'origine) :

"Si $AB' \| A'B$ et si $BC' \| B'C$, alors $AC' \| A'C$". C'est un exercice intéressant de géométrie élémentaire (multiplicative) que de démontrer cette propriété dite "de Pappus-Pascal". En 1909, Hilbert l'a démontrée en géométrie additive en utilisant la théorie des angles et le lemme angulaire de cocyclicité de 4 points (propriété des quadrangles inscriptibles).

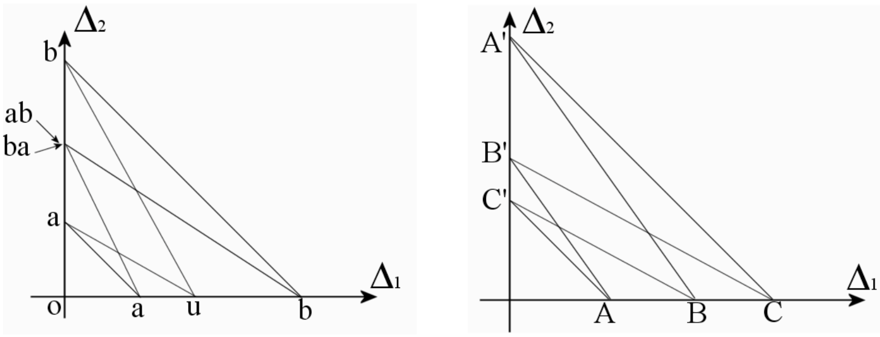

FIG. 4 –

La même année 1909, un autre mathématicien allemand, Schur, publie un ouvrage (de même titre "Grundlagen der Geometrie") où il donne une nouvelle démonstration du lemme de Pappus-Pascal avec des moyens beaucoup plus économiques, puisqu'il utilise seulement le théorème de l'orthocentre (compte tenu de l'axiome des parallèles, on sait que la concourance des hauteurs résulte de la concourance des médiatrices). En 1911, Halsted cite déjà la démonstration de Schur dans un livre d'enseignement intitulé "Géométrie rationnelle".

On remarquera que le lemme de Pappus-Pascal permet également d'obtenir l'*associativité* de la multiplication thalésienne. Nous chercherons à obtenir la formule $(ca)b = (cb)a$ qui fournit simultanément la commutativité (par $c = u$) et l'associativité.

Voici tout d'abord la démonstration très simple de Schur (Fig. 5).

Les hypothèses sont : $AB' \| A'B$ et $BC' \| B'C$. On introduit alors le point I de Δ_1 tel que $B'I \perp C'A$.

Le point C' est donc orthocentre de $AB'I$, donc $C'I \perp AB'$. Puisque $C'I \perp A'B$, C' est encore orthocentre de $BA'I$, donc $A'I \perp BC'$. Puisque $A'I \perp B'C$, B' est orthocentre de $CA'I$, donc

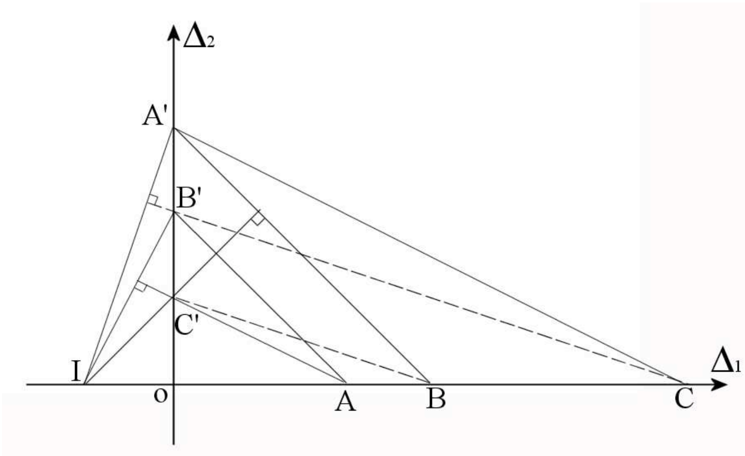

FIG. 5 –

$B'I \perp A'C$ et finalement : $AC' \| A'C$.
(Les cas particuliers où I se confond avec l'un des points A, B, C sont encore plus faciles à étudier.)
Pour en déduire la formule mixte de commutativité-associativité $(ca)b = (cb)a$, il suffit, dans la figure de Pappus-Pascal, de prendre respectivement a, b, u comme abscisses des points A, B, C, et $cb, ca, (ca)b, c$ comme ordonnées respectives des points A', B', C' et J (point auxiliaire sur Δ_2). Par définition de la multiplication thalésienne, J est tel que CJ est parallèle à $A'B$ et à $B'A$: il en résulte bien $(ca)b = (cb)a$ comme ordonné du point C.
7) La *distributivité à gauche* résulte de la commutativité et de la distributivité à droite.

***En résumé*, étant parti du groupe additif totalement ordonné G on a pu (grâce à une définition inspirée du théorème de Thalès) doter G d'une structure de *corps ordonné*.**

3 Applications

3.1

Pour terminer, examinons la démonstration du théorème de Thalès (Fig. 6). Dans le repère (Δ_1, Δ_2), soit D_1, D_2 deux droites d'équations respectives $y = a_1x, y = a_2x$.
Une parallèle (*variable*) à Δ_2 coupe D_1 en M et D_2 en N : il s'agit de montrer que le rapport

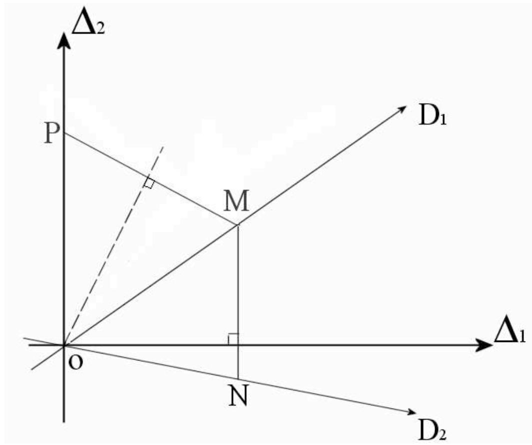

FIG. 6 –

$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$ est alors constant.
$(D_1, D_2$ étant arbitrairement orientées.)
Sur Δ_2, soit P le point d'ordonnée $\overline{OP} = \overline{OM}$.
Quand M parcourt la droite D_1, la droite variable MP garde une direction fixe (perpendiculaire à la bisectrice de l'axe Δ_2 et de l'axe porté par D_1) : il existe donc une constante b_1 pour laquelle la droite MP prend l'équation $y = b_1x+\overline{OP} = b_1x+\overline{OM}$. L'abscisse m de M vérifie donc : $\overline{OM} = a_1m - b_1m = (a_1 - b_1)m$ en utilisant pour la première fois la distributivité à gauche de la multiplication thalésienne (démontrée *après* la commutativité). De même, il existe une constante b_2 pour laquelle l'abscisse $n = m$ de N vérifie :$\overline{ON} = (a_2 - b_2)n$. Donc : $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}$.

3.2 Remarques

Du théorème de Thalès résulte l'invariance (pour u fixe) de la multiplication thalésienne $\mu(u)(r)$, quel que soit le repère r. Puis le développement de la théorie redevient très classique.
a) Examinons par exemple le théorème de Pythagore (Fig. 7). Sur Δ_1, soit A le point d'abscisse $x \neq 0$. Sur Δ_2, soit B un point d'ordonnée $y \neq 0$. Sur le segment $[A, B]$ (de longueur z), l'origine O se projette orthogonalement en H. La symétrie par rapport à la bisectrice de l'angle $\widehat{OAB}$ transforme O en M et H en N, de sorte que : $|x| = AM$, $AH = AN$. La droite MN étant parallèle à Δ_2, le théorème de Thalès donne : $\frac{AM}{AB} = \frac{|x|}{AB} = \frac{AO}{AB} = \frac{AN}{AM} = \frac{AH}{|x|}$ donc : $x^2 = AB.AH$. De même : $y^2 = AB.BH$ et $x^2 + y^2 = AB(AH + BH) = z^2$.
Le corps des scalaires est donc bien pythagoricien.

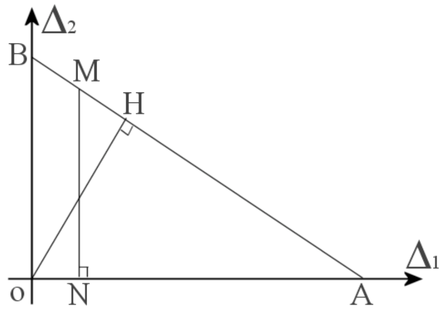

FIG. 7 –

b) Par ailleurs, si $0 < a < 1$, plaçons sur Δ_1 les points A_1, B_1, H_1 d'abscisses respectives, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}$. Si l'axiome du compas est imposé[2], la droite d'équation $x = a - \frac{1}{2}$ rencontre en

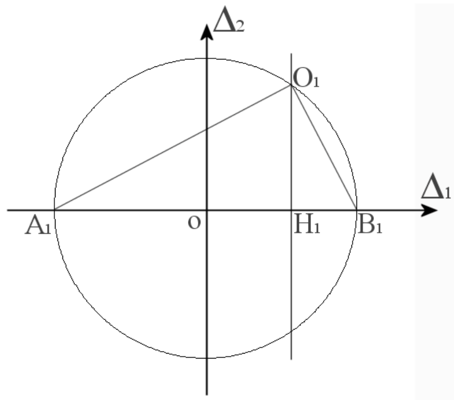

FIG. 8 –

O_1 le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$. La formule précédente $(O_1A_1)^2 = A_1B_1.A_1H_1$ fournit $O_1A_1 = \sqrt{a}$. Il en résulte que le corps des scalaires est quadratiquement clos.

[2] Sous la seule hypothèse que la jauge scalaire K soit un corps ordonné pythagoricien, il n'est pas encore possible de montrer que le plan (K^2, d) vérifie l'axiome du compas : "*Si une droite possède un point intérieur à un cercle, alors elle rencontre ce cercle.*" En effet, pour $a \in K$, $a > 1$, introduisons la droite $D(a)$ d'équation $x = a-1$ et le cercle $C(a)$ d'équation $x^2+y^2 = (a+1)^2$: $D(a)$ et $C(a)$ ne se rencontrent en un point $(a-1, 2b)$ de K^2 que si $a = b^2$. Ainsi, l'axiome du compas exige que le corps ordonné K soit quadratiquement clos. Un contre-exemple est fourni par le corps ordonné pythagoricien minimal $\mathbf{P}$ (non quadratiquement clos) : la droite $D(\sqrt{2})$ et le cercle $C(\sqrt{2})$ ne se rencontrent pas dans le plan $\mathbf{P}^2$.

Annexe

1) Quelques rappels de définitions classiques :

Une relation binaire w définie sur un ensemble X est une partie w de $X \times X$. Si $(x, y) \in w$ on écrit xwy.

Une relation binaire w sur une ensemble X est appelée relation d'ordre ssi elle est réflexive, antisymétrique et transitive, c'est à dire, ssi elle vérifie :

(1) $\forall x \in X, xwx$ (réflexivité)

(2) $\forall x \in X, \forall y \in Y, xwy$ et $ywx \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)

(3) $\forall x \in X, \forall y \in E, \forall z \in E, xwy$ et $ywz \Rightarrow xwz$ (transitivité)

Le couple (X, w) est appelé ensemble ordonné. w est noté dans la suite $\leq$. Deux éléments x, y d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$. La relation $\leq$ est une relation d'ordre total si deux éléments quelconques de X sont comparables.

Il existe au plus un élément M de X tel que pour tout $x \in X$ on ait $x \leq M$ (utiliser l'antisymétrie), d'où la définition : un élément M est appelé le plus grand élément de X si pour tout $x \in X$ on a $x \leq M$.

Un groupe abelien G noté additivement est dit totalement ordonné lorsqu'il est muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$ telle que $\forall (x, y, z) \in G^3$, $x \leq y \Rightarrow x + y \leq y + z$.

2) Voici un énoncé possible des axiomes de la géométrie plane.

Axiome 1 : Par deux points distincts de E, il passe une droite et une seule.

Axiome 2 : Pour toute droite D de E, il existe une isométrie involutive σ de E telle que $\sigma(M) = M$ pour tout $M \in D$.

(Une isométrie *involutive* σ est assujettie à $\sigma \neq 1_E$ et $\sigma \circ \sigma = 1_E$ où 1_E désigne la transformation identique de E et $\sigma \circ \sigma$ la composée $M \mapsto \sigma(\sigma(M))$.)

Puisque les axiomes 1 et 2 sont vérifiés dans tout espace de dimension $n \geq 2$, il nous faut maintenant un axiome "planificateur" qui assure $n = 2$. Ce sera l'axiome de Pasch.

Axiome 3 : Si aucun des points A, B, C n'est situé sur une droite D, le nombre des segments $[A, B], [B, C], [C, A]$ qui rencontrent D est pair (c'est à dire, 0 ou 2).

Axiome 4 (axiome d'Euclide) : Si un point A n'est pas situé sur une droite D, il existe *au plus* une droite D' de E passant par A et ne rencontrant pas D.

Axiome 5 (axiome du compas) : Si une droite D possède un point intérieur à un cercle C, alors D et C se rencontrent.

Le produit thalésien des scalaires en géométrie plane

(Pierre Anglès, Université Paul Sabatier, Toulouse)

FICHE DE QUESTIONS POUR LES EXAMINATEURS

1) Faire vérifier qu'un corps euclidien est pythagoricien.
Si $x, y \in K$ euclidien, considérant $a = x^2 + y^2$ qui est ≥ 0, comme le corps est euclidien, il existe $z \in K : z^2 = a = x^2 + y^2$, donc le corps est pythagoricien.
La réciproque est fausse. Demander au candidat où est indiqué sans démonstration la justification ($\sqrt[4]{2} \notin P$ corps pythagoricien minimal de $\mathbf{R}$ alors que $\sqrt{2} \in P$).

2) Vérifier que les critères de constructibilité sont bien assimilées.

3) Vérifier que la définition du produit thalésien est bien comprise (Fig. 1).
Faire vérifier géométriquement que $ax = xa$ par exemple que u est élément puis que $(-a)x = a(-x)$.

4) Justifier la figure 3.

5) Justifier la figure 4.

6) Vérifier la compréhension du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore.

7) Vérifier la compréhension de la note 2, page 10).