

Épreuve de TIPE – Partie D

Titre : Interpolation sous contrainte de courbure

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

Guide pour le candidat

Le dossier ci-joint comporte :

- Document principal : 12 pages
- Documents complémentaires : 2 pages

Travail suggéré au candidat :

Ce document présente un certain nombre d'outils permettant de résoudre un problème d'interpolation géométrique sous contraintes de courbure. Dans sa synthèse, le candidat fera ressortir les points suivants :

- la nature du problème traité en précisant les aspects interpolation et approximation,
- les principaux outils développés pour résoudre ce problème,
- la construction proposée pour l'interpolation G^2 à courbure monotone.

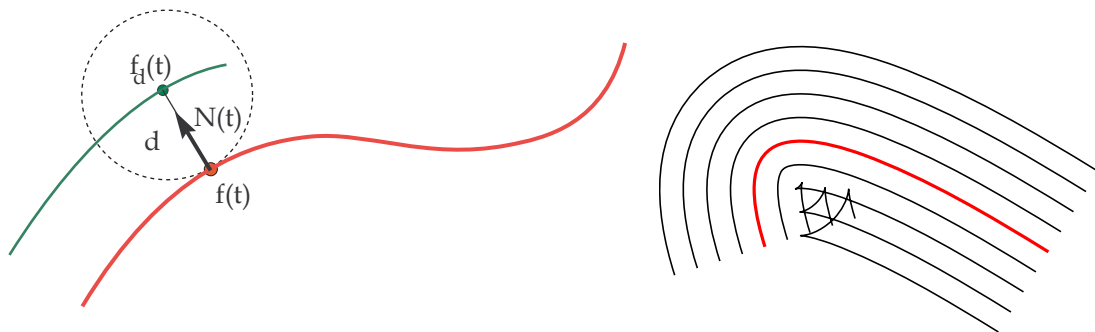
CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :

- Lisez le dossier en entier en un temps raisonnable.
- Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.
- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation.
- En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé. A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que tous les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

On se place ici dans un contexte de modélisation géométrique. La conception et la fabrication assistée par ordinateur (CFAO) conduit à définir et à manipuler des courbes et des surfaces. Ces courbes et surfaces sont le plus souvent décrites sous forme paramétrique à l'aide de fonctions polynomiales ou rationnelles. Elles sont généralement définies par morceaux qui se raccordent entre eux. Ceci a conduit à utiliser et à définir des bases de polynômes adaptées au mode de la CAO. Il s'agit par exemple des bases de Bernstein et des bases de B-splines.

Cependant, la conception et la définition de formes géométriques s'appuient parfois sur des données préalables. Celles-ci proviennent par exemple d'acquisition scanner, tomographique,... On parle alors de reconstruction. La forme à reconstruire passera alors par les données (interpolation) ou alors à proximité de ces données (approximation). Ces données peuvent également fournir des informations ou des contraintes sur la forme à modéliser. Ces contraintes étant le résultat de calculs ou simplement de nature esthétique. En design géométrique par exemple, cette notion d'esthétisme s'appuie en particulier sur des critères liés à la courbure et en particulier à la monotonie de courbure.

Par ailleurs la modélisation de forme doit bien souvent permettre des calculs ultérieurs (intersection, calcul d'offset,...). Ainsi, le calcul d'offset, c'est à dire de courbes parallèles est important en usinage pour la modélisation de trajectoire d'outils.



- Figure 1 -

A gauche : la courbe f_d est la trajectoire du centre d'un outil circulaire usinant la courbe f . A droite : famille d'offsets à distance $d \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$.

Pour une courbe paramétrée plane $t \in [0, 1] \mapsto f(t) = ((f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire d'un outil circulaire, de rayon d , décrit la courbe paramétrée $t \in [0, 1] \mapsto f_d(t) = f(t) + d \cdot N(t)$, où $N(t)$ est la normale unitaire à la courbe f en $f(t)$. Pour une courbe rationnelle f , c'est à dire telle que ses composantes $f_1(t)$ et $f_2(t)$ soient le rapport de polynômes en le paramètre t , il est à noter que les courbes offset $f_d(t)$ ne le sont généralement pas, du fait de la non rationalité de la normale unitaire $N(t)$ (liée à la racine carrée de la normalisation). Ce qui interdit la modélisation de ces courbes parallèles à l'aide des outils usuels de la CAO. Il existe cependant un certain nombre d'exceptions comme nous le verrons par la suite.

Nous considérons dans ce document un problème d'interpolation géométrique plane, de type Hermite G^2 (cf. §3), sous contrainte de monotonie de courbure. Ce problème d'interpolation étant par ailleurs couplé avec un problème d'approximation d'offset. La résolution de ce problème s'appuie sur une double construction par dualité des quartiques

de Tschirnhausen. Ces quartiques sont des courbes paramétrées rationnelles de degré 4 ayant la propriété d'être stables par offsetting. Leur caractérisation et une de leur construction repose sur la notion de représentation Bézier duale des courbes planes. Nous ne détaillerons pas ici cette construction. Une autre construction de ces courbes, essentielle pour la résolution de notre problème d'interpolation de courbures s'appuie sur la dualité entre courbe développée et courbe développante.

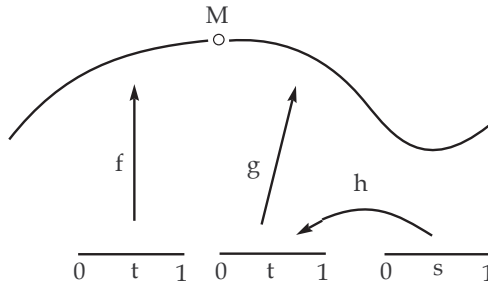
1 - Continuité géométrique

On considère deux courbes planes paramétrées régulières suffisamment dérivables, qui se rencontrent en un point M :

$$t \in [0, 1] \mapsto f(t), \quad t \in [0, 1] \mapsto g(t), \quad \text{avec } f(1) = M = g(0).$$

Ces deux courbes ont un contact différentiable d'ordre k en M , noté C^k , si et seulement si leurs dérivées coïncident en M jusqu'à l'ordre k , c'est à dire ssi $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(0)$, $1 \leq j \leq k$.

On dit maintenant que ces deux courbes ont un contact (ou un raccord) géométrique d'ordre k en M , noté G^k , si et seulement si elles ont un contact C^k après reparamétrisation (préservant l'orientation) de la courbe g , par exemple. Ainsi, f et g se raccordent G^k en M si et seulement si il existe un changement de variables $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $s \mapsto h(s) = t$, de classe C^k , avec $h(0) = 0$, préservant l'orientation ($h'(s) > 0$, pour tout s), et tel que f et $g \circ h$ se raccordent C^k en M .

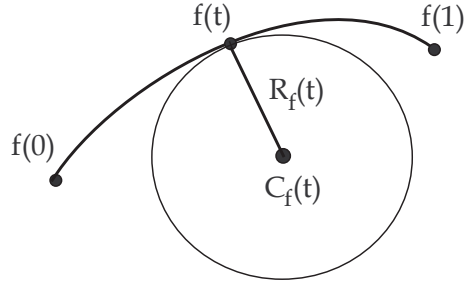


- Figure 2 - Changement de paramétrisation.

La notion de continuité géométrique entre 2 courbes est en fait une notion intrinsèque qui n'est pas liée à une description particulière (càd, à une paramétrisation) de ces courbes. On peut montrer que les deux courbes f et g se raccordent G^1 en M , si et seulement si elles ont même tangente orientée (par le vecteur dérivé) en M et qu'elles ont un contact G^2 en M si en plus elles ont même courbure en M .

Pour une courbe plane paramétrée $f(t)$, régulière ($f'(t) \neq \vec{0}$ pour tout t), le repère de Serret-Frenet est le triplet $[f(t), T_f(t), N_f(t)]$ défini par $T_f(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ et $N_f(t) = \text{Rot}_{\pi/2}(T_f(t))$. La courbure $K_f(t)$ de la courbe f en $f(t)$ est définie par $K_f(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}$.

On note que cette courbure est un scalaire signé. Les points de courbure nulle sont appelés ici points d'inflexion. Une courbe sans inflexion sera dite strictement convexe.



- Figure 3 - Centre de courbure et cercle osculateur.

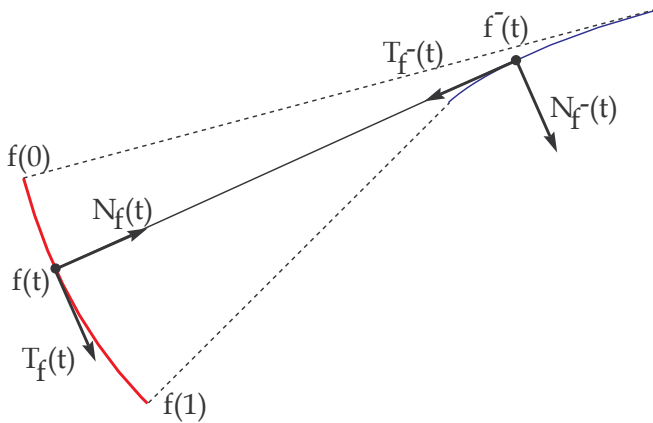
En dehors de ces points d'inflexion on définit le rayon de courbure $R_f(t)$ au point $f(t)$ comme l'inverse de la courbure en ce point, le centre de courbure $C_f(t) = f(t) + R_f(t) N_f(t)$ au point $f(t)$ ainsi que le cercle osculateur en $f(t)$ de centre $C_f(t)$ et de rayon $|R_f(t)|$. Les formules de Serret-Frenet donnent les dérivées des vecteurs $T_f(t)$ et $N_f(t)$ en fonction de la courbure $K_f(t)$.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_f(t) \\ N_f(t) \end{pmatrix} = \|f'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & K_f(t) \\ -K_f(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_f(t) \\ N_f(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

2 - Développée - développante

Avec les notations précédentes, le lieu des centres de courbure d'une courbe f strictement convexe est la courbe développée ou tout simplement la développée de la courbe f . On notera $f^- = C_f$ cette développée, elle admet donc pour paramétrisation $t \mapsto f^-(t) = f(t) + K_f(t)^{-1} \cdot N_f(t)$. Les formules de Serret-Frenet (1), permettent d'exprimer le repère de Serret-Frenet de la courbe f^- :

$$\begin{aligned} T_{f^-}(t) &= -\epsilon(t) N_f(t) \\ N_{f^-}(t) &= \epsilon(t) T_f(t) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \epsilon(t) = \frac{K'_f(t)}{|K'_f(t)|} \quad (2)$$



- Figure 4 -
Courbe développée f^- de
la courbe f .

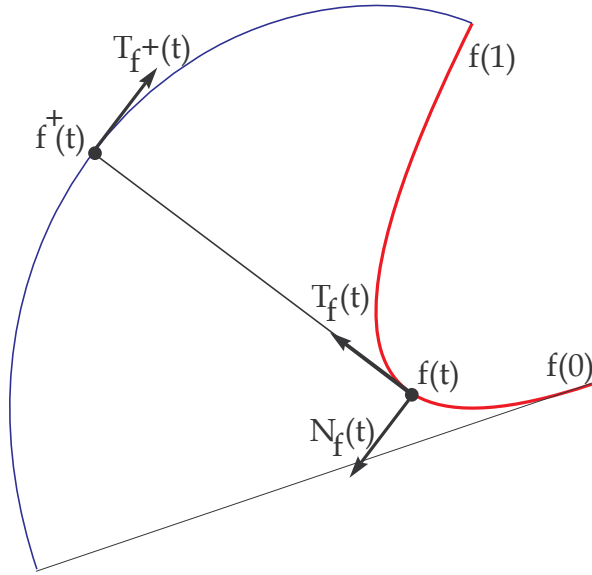
On vérifie par ailleurs que

$$\int_0^1 \|(f^-)'(u)\| du = \left| \frac{1}{K_f(1)} - \frac{1}{K_f(0)} \right| \quad (3)$$

ce qui signifie que la longueur de la développée f^- est la différence des rayons de courbure de la courbe f à ses extrémités.

Etant donné un réel δ , la courbe développante à la distance δ de la courbe f est la courbe f_δ^+ définie par la paramétrisation $t \mapsto f_\delta^+(t) = f(t) + (\sigma(t) + \delta)T(t)$ avec $\sigma(t) = \int_t^1 \|f'(u)\| du$. Le repère de Serret-Frenet de la courbe f_δ^+ est donné par

$$\begin{aligned} T_{f_\delta^+}(t) &= \alpha(t) N_f(t) \\ N_{f_\delta^+}(t) &= -\alpha(t) T_f(t) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \alpha(t) = \frac{(\sigma(t) + \delta)K_f(t)}{|(\sigma(t) + \delta)K_f(t)|} \quad (4)$$



- Figure 5 -

Développante $f^+ = f_0^+$ de la courbe f à la distance $\delta = 0$.

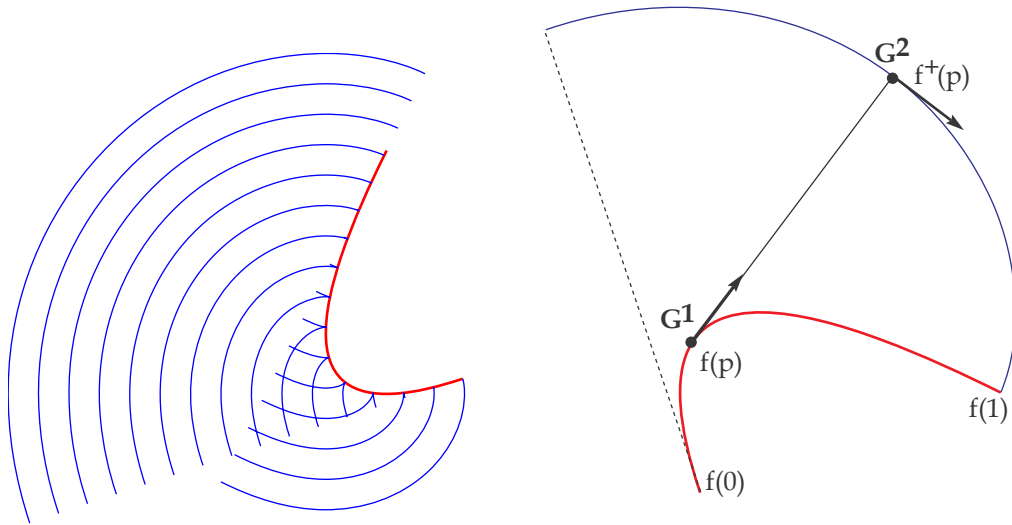
Dans le cas général, on peut imaginer la trajectoire de l'extrémité d'un fil de longueur $\sigma(0) + \delta$, accroché en $f(0)$, tendu sur la courbe f , que l'on déplie en le maintenant tendu (le parcours est alors "inversé" par rapport à la paramétrisation $f^+(t)$).

Proposition 1 On déduit immédiatement de la formule (4) que pour tout δ , les développantes f_δ^+ de f sont parallèles entre elles (cf. figure 6 gauche).

La courbure de la développante f_δ^+ au point $f_\delta^+(t)$ pour $(\sigma(t) + \delta) K_f(t) \neq 0$ est

$$K_{f_\delta^+} = \frac{K_f(t)}{|K_f(t)|} [\sigma(t) + \delta]^{-1} \quad (5)$$

ce qui signifie qu'au signe près, le rayon de courbure en $f_\delta^+(t)$ est égal à la distance $|(f(t), f_\delta^+(t))|$.



- Figure 6 -

A gauche : famille de développantes f_δ^+ pour différentes valeurs de δ .

A droite : développante G^2 d'une courbe G^1 , en notant comme précédemment $f^+ = f_0^+$.

- 5 **Proposition 2** La développante d'une courbe G^1 est une courbe G^2 . Précisément, si l'on considère deux courbes convexes régulières de classes C^3 ayant un contact G^1 en un point $f(p)$ (cf. figure 6 droite) où leurs courbures sont du même signe, alors leurs développantes ont même courbure en $f_\delta^+(p)$.

Proposition 3 Sous de bonnes hypothèses on a $(f^+)^- = f$ et $(f^-)^+ = f$.

10 Précisément :

$$(f_\delta^+)^- = f, \quad \text{pourvu que } (\sigma(t) + \delta) K_f(t) \neq 0,$$

$$(f^-)_{\omega/K_f(1)}^+ = f, \quad \text{où } \omega = \frac{K_f'(t)}{|K_f'(t)|}, \quad \text{pourvu que } K_f(t) \cdot K_f'(t) \neq 0,$$

pour une paramétrisation f régulière de classe C^3 .

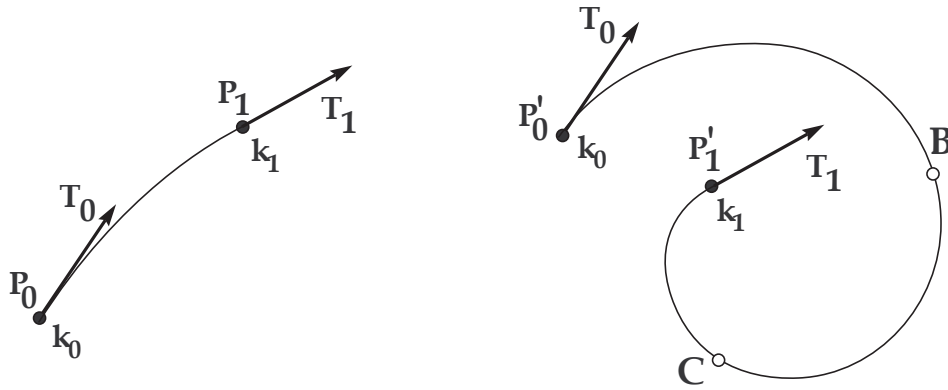
3 - Interpolation de Hermite G^2

Dans la suite, un *élément de courbure* sera un triplet (P, T, k) composé d'un point P , d'une direction T (c'est à dire un vecteur unitaire) et d'un réel non nul k . A chaque élément de courbure (P, T, k) nous associons son centre de courbure \tilde{P} défini par $\tilde{P} = P + k^{-1}\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(T)$.

5 Ainsi, une courbe G^2 définit des éléments de courbure, chacun d'eux étant composé d'un point sur la courbe, du vecteur tangent unitaire et de la courbure en ce point.

Eléments admissibles

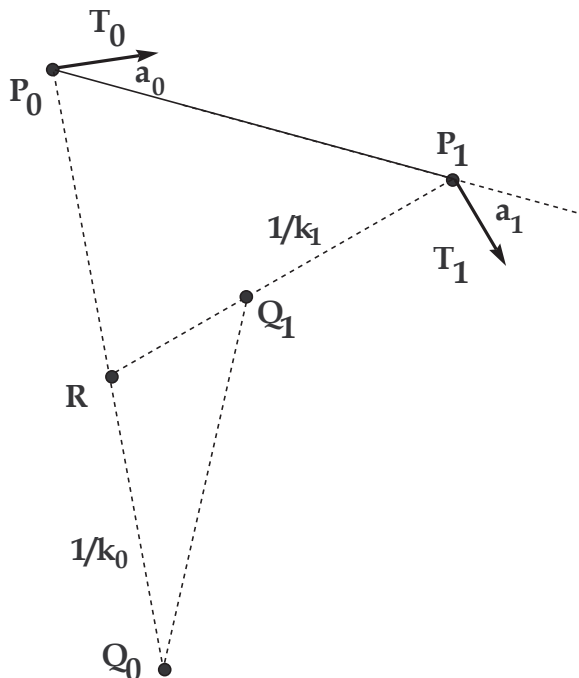
La rotation d'une courbe G^2 convexe entre deux de ses points est l'angle de rotation (mesuré dans \mathbb{R}) de son vecteur tangent unitaire. Deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) sont dits *admissibles* s'il existe une courbe convexe à courbure monotone de rotation inférieure à π (en valeur absolue) entre ses extrémités, interpolant ces éléments, c'est à dire, joignant les points P_0 et P_1 et admettant en P_0 et P_1 respectivement les vecteurs tangents T_0 et T_1 et les courbures k_0 et k_1 .



15 - Figure 7 - *Eléments de courbure admissibles (à gauche) et non admissibles (à droite). Sur ces deux exemples, les courbures k_0 et k_1 sont négatives.*

Admissibilité et géométrie

Etant donnée deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) , avec $k_0 k_1 > 0$, on note $Q_0 = \tilde{P}_0$ et $Q_1 = \tilde{P}_1$ les centres de courbure associés (cf. figure 8). On considère également les angles $a_0 = ((P_0 P_1), T_0)$ et $a_1 = ((P_0 P_1), T_1)$, ainsi que le point d'intersection R des droites $(P_0 Q_0)$ et $(P_1 Q_1)$.



- Figure 8 -
Géométrie d'éléments de courbure admissibles (cas d'une courbure négative décroissante - donc croissante en valeur absolue).

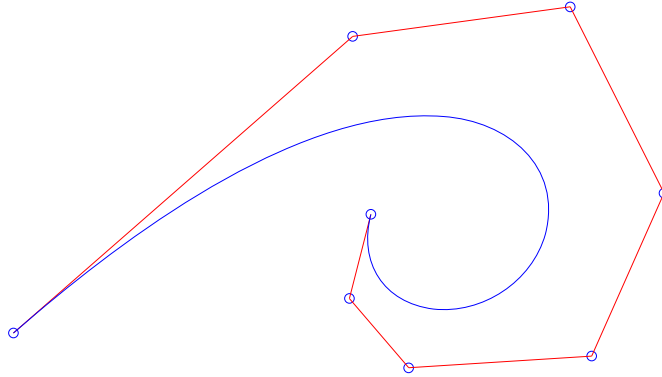
Théorème 1 (Guggenheimer & Ostrowski 1963). *Les deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) sont admissibles (à courbure négative décroissante) si*

- i) $-\frac{\pi}{2} < a_1 < 0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$,
- ii) $0 < |Q_0 Q_1| < |P_0 Q_0| - |P_1 Q_1| < |Q_0 R| + |R Q_1|$
- iii) *le triangle (Q_0, Q_1, R) est de sens direct.*

Remarque 1 - Il est essentiel de remarquer pour notre problème d'approximation que chaque courbe obtenue par le théorème 1 est la développante d'une courbe $r(t)$, convexe, G^1 , de longueur $|k_0|^{-1} - |k_1|^{-1}$, d'extrémités Q_0 et Q_1 , admettant pour vecteurs tangents $\vec{Q_0 R}$ en Q_0 et $R\vec{Q_1}$ en Q_1 , et inscrite dans le triangle $(Q_0 R Q_1)$.

4 - Courbes de Bézier polynomiales

Une courbe de Bézier plane, de degré n , s'écrit $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$, $t \in [0, 1]$, où les P_i sont des points du plan et où les $B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ sont les polynômes de Bernstein de degré n (relativement à l'intervalle $[0, 1]$). Ceux-ci forment une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Ils sont positifs sur l'intervalle $[0, 1]$ et vérifient la propriété de partition de l'unité $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1$.



- Figure 9 - Courbe de Bézier polynomiale et son polygone de contrôle.

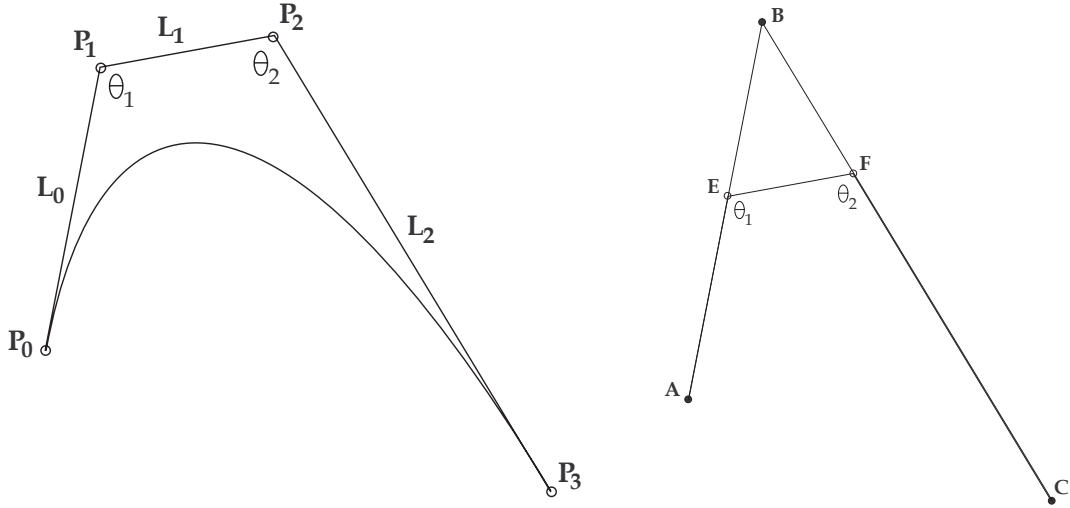
Le polygone $\mathcal{P} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ est appelé polygone Bézier ou polygone de contrôle de la courbe de Bézier. La courbe de Bézier associée est contenue dans l'enveloppe convexe du polygone \mathcal{P} , elle part du premier point $P_0 = P(0)$, tangente au segment $[P_0, P_1]$ et arrive en $P_n = P(1)$, tangente au segment $[P_{n-1}, P_n]$. En fait, la courbe suit l'allure de son polygone de contrôle, ce qui permet une définition intuitive de la courbe. On notera $BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t) = P(t)$ cette courbe de Bézier.

5 - Cubiques et Quartiques de Tschirnhausen

Les *quartiques de Tschirnhausen*, ou T-quartiques, sont des courbes rationnelles paramétrées de degré 4 qui ont la propriété d'être stables par offsetting, c'est à dire que leurs courbes parallèles sont encore des T-quartiques. Ces courbes sont strictement convexes dans le sens où leur courbure ne s'annule jamais. Par ailleurs, chaque segment régulier d'une T-quartique est à courbure monotone. Ces courbes sont exactement les développantes des *cubiques de Tschirnhausen*, ou T cubiques, qui sont des courbes paramétrées polynomiales de degré 3, dont l'abscisse curviligne est rationnelle. Les T-cubiques ne sont pas stables par offsetting, mais elles possèdent des offsets rationnelles de degré 5 et sont convexes.

Farouki (1991) a donné une caractérisation géométrique simple et élégante des T-cubiques. Pour cela, on considère la représentation Bézier d'une T-cubique

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t) = BP[P_0, P_1, P_2, P_3](t).$$



- Figure 10 - Cubique de Tschirnhausen.

Théorème 2 (Farouki 1991). *La courbe Bézier cubique $BP[P_0, P_1, P_2, P_3]$ est une T-cubique si et seulement si*

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{and} \quad L_1^2 = L_0 L_2,$$

où $L_0 = |P_0 P_1|$, $L_1 = |P_1 P_2|$, $L_2 = |P_2 P_3|$, et où θ_1, θ_2 sont les angles orientés intérieurs $((P_1 P_0), (P_1 P_2))$ et $((P_2 P_1), (P_2 P_3))$ en P_1 et P_2 respectivement (cf. figure 10).

Proposition 4 *La longueur de la courbe Bézier T-cubique $BP[P_0, P_1, P_2, P_3](t) = P(t)$ est donnée par*

$$L(P) = \int_0^1 |P'(t)| dt = L_0 + L_2 - L_1 \cos \theta_1,$$

5 avec les notations du théorème précédent.

Proposition 5 *Etant donné un triangle non dégénéré (ABC) (cf. figure 10), il existe un unique point E sur le segment $[AB]$ et un unique point F sur le segment $[BC]$ tel que la courbe Bézier $BP[A, E, F, C]$ soit une T-cubique. On notera $T[ABC]$ cette unique T-cubique associée au triangle (ABC) .*

10 Notons enfin qu'il existe par ailleurs une construction Bézier duale particulièrement simple des courbes T-quartiques. La représentation duale d'une courbe consiste à la définir comme l'enveloppe de ses tangentes. Dans ce formalisme, les T quartiques se déduisent naturellement de la représentation d'un arc de cercle après élévation du degré. Cette construction n'est pas abordée ici.

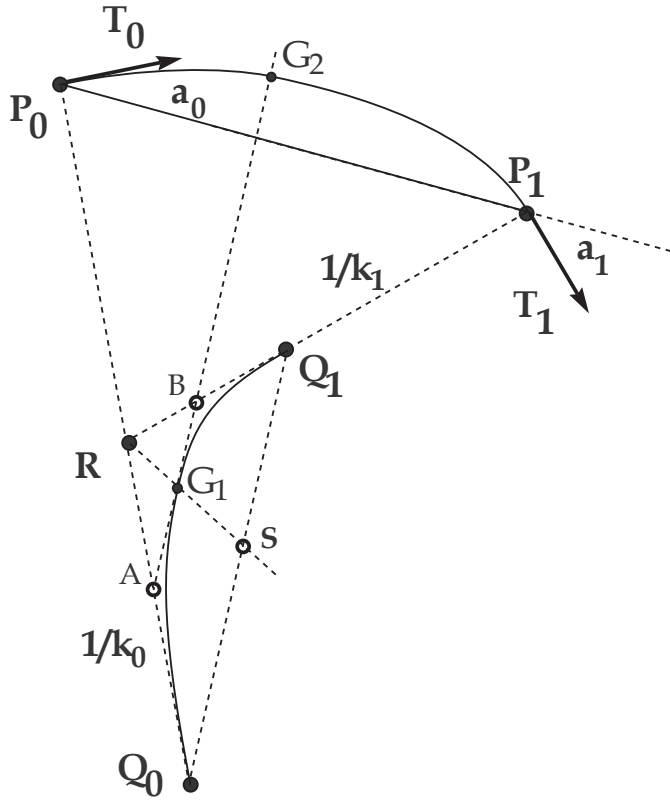
6 - Stratégie d'approximation

Après avoir développé les outils, nous revenons à notre problème d'approximation. Précisément, étant donnée une courbe suffisamment régulière $s(t)$, notre objectif est de l'approximer par une courbe G^2 composée de segments T-quartiques, de sorte que le calcul des courbes offset sera immédiat. Par ailleurs, nous souhaitons respecter les variations de courbure de la courbe initiale $s(t)$.

Puisque les T-quartiques sont strictement convexes, la courbe $s(t)$ sera supposée sans inflexion. La stratégie consiste alors à déterminer les points de courbure extrême de la courbe $s(t)$ et à ensuite rajouter des points intermédiaires de sorte qu'entre 2 points consécutifs la rotation de la courbe soit inférieure à π . On obtient ainsi une suite d'éléments de courbure admissibles ce qui nous conduit à reformuler notre problème de la manière suivante. *Etant donné deux éléments de courbure admissibles, existe-t'il une courbe G^2 à courbure monotone composée de segments T-quartiques, qui interpole ces éléments de courbure ?* Puisque les T-quartiques sont exactement les développantes des T-cubiques, notre problème consiste donc maintenant (en utilisant le théorème 1) à construire une courbe G^1 composée de segments de T-cubiques, satisfaisant la contrainte de longueur spécifiée dans la remarque 1.

On peut remarquer qu'en général il n'existe pas de solution avec une seule T-quartique. En effet, on sait d'après la proposition 5, qu'il existe une unique T-cubique $T[Q_0RQ_1]$ inscrite dans le triangle (Q_0RQ_1) de la figure 8, et que sa longueur $L(T[Q_0RQ_1])$ est spécifiée par la proposition 4. Ainsi, il n'existe une T-quartique interpolant les deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) que si $|k_0|^{-1} - |k_1|^{-1} = L(T[Q_0RQ_1])$, ce qui n'est pas vérifié en général.

On montre cependant qu'il existe une solution avec deux T-quartiques se raccordant G^2 entre elles, formant une courbe $r(t)$. Cette courbe $r(t)$ est à courbure continue strictement monotone et interpole les deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) . Pour cela, on construit une courbe $r^-(t)$ composée de deux T-cubiques se raccordant G^1 entre elles d'après la proposition 2, inscrite dans le triangle (Q_0RQ_1) de la figure 8, et de longueur totale $|k_0|^{-1} - |k_1|^{-1}$.



- Figure 11 -
Construction de deux
T-cubiques G^1 pour
l'interpolation Hermite
 G^2 des éléments de
courbure (P_0, T_0, k_0) et
 (P_1, T_1, k_1) .

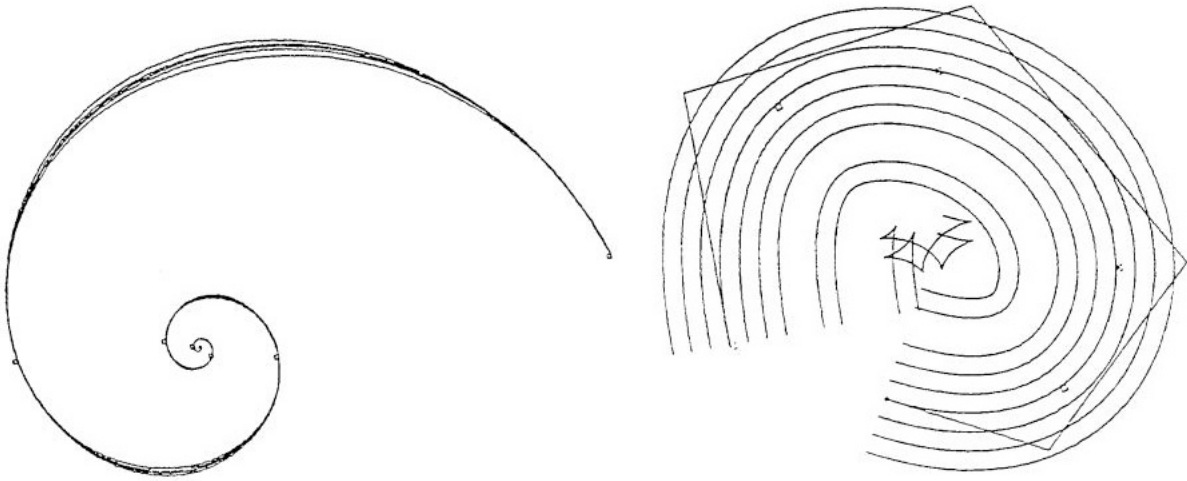
Précisément, considérons la figure 11, ainsi que deux réels $\alpha, \beta \in]0, 1[$ fixés. On associe au triangle $(Q_0 R Q_1)$ les deux triangles $(Q_0 A G_1)$ et $(G_1 B Q_1)$ où les points A, B, G_1 sont définis par

$$A = (1 - \alpha)R + \alpha Q_0, \quad B = (1 - \alpha)R + \alpha Q_1, \quad G_1 = (1 - \beta)A + \beta B.$$

On remarque que la droite (AB) est parallèle à la droite $(Q_0 Q_1)$. Utilisant à nouveau la proposition 5, on définit les uniques deux T-cubiques $T[Q_0 A G_1]$ et $T[G_1 B Q_1]$ qui par construction se raccordent G^1 en G_1 .

- 5 Ces deux T-cubiques forment une courbe $r_{\alpha, \beta}^-(t)$ convexe, G^1 , d'extrémités Q_0 et Q_1 , admettant pour vecteurs tangents $Q_0 \vec{R}$ en Q_0 et $R \vec{Q}_1$ en Q_1 , et inscrite dans le triangle $(Q_0 R Q_1)$. La longueur de cette courbe est comprise entre $|Q_0 Q_1|$ et $|Q_0 R| + |R Q_1|$. On montre ensuite par des arguments de continuité de la fonction longueur qu'il existe une valeur α_0 du paramètre α pour laquelle cette longueur est exactement égale à $|k_0|^{-1} -$
10 $|k_1|^{-1}$ ce qui avec le théorème 1 fournit la solution de notre problème. La construction des deux T-quartiques consiste ensuite à déterminer le point G_2 image du point G_1 en développant la courbe $r_{\alpha_0, \beta}^-(t)$ à la distance ω/k_1^{-1} (cf. proposition 3). Les formules (4) et (5) fournissent la tangente unitaire et la courbure en G_2 . Connaissant les éléments de courbure aux extrémités de chacune des 2 T-quartiques interpolantes il est ensuite aisé
15 de les construire en utilisant leur représentation duale.

Il est à noter que l'on obtient en fait une famille de solutions interpolantes dépendant du paramètre β qui est appelé paramètre de tension.



- Figure 12 -

A gauche : approximation G^2 à courbure monotone d'une spirale logarithmique et influence du paramètre de tension. A droite : approximation G^2 à courbure monotone d'une B-spline cubique et de ses courbes offset.

5