

ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2013 - Partie D**TITRE :****Calculs approchés d'un point fixe**

Temps de préparation :2 h 15 minutes

Temps de présentation devant les examinateurs :10 minutes

Dialogue avec les examinateurs :10 minutes

GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 10 pages

Document principal (9 pages, dont celle-ci) ; annexe : 1 pages

Travail **suggéré** au candidat :

Expliquer et comparer les algorithmes présentés dans le dossier en rétablissant certains des arguments à la base des affirmations du texte. Faire le parallèle entre les cas scalaire et vectoriel, en particulier pour les conditions de convergence.

Attention : si le candidat préfère effectuer un autre travail sur le dossier, il lui est **expressément recommandé** d'en informer le jury avant de commencer l'exposé.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (dossier, transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt à débiter votre exposé.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre aux examinateurs le présent dossier dans son intégralité. Tout ce que vous aurez présenté aux examinateurs pourra être retenu en vue de sa destruction.

IL EST INTERDIT DE SORTIR LE DOSSIER DU SITE DE L'EPREUVE

CALCULS APPROCHÉS D'UN POINT FIXE

1 Introduction

On dit que x_* est un point fixe de la fonction $\Phi : E \rightarrow E' \subset E$, si l'on a

$$\Phi(x_*) = x_* \quad \text{et} \quad x_* \in E. \quad (1)$$

On s'intéresse dans ce dossier au calcul effectif d'un tel point fixe. La méthode de calcul illustrée ici est connue sous le nom de méthodes des approximations successives : il s'agit d'un processus itératif que l'on laisse agir à partir d'une donnée initiale pour s'approcher d'un état stationnaire, le point fixe du système.

Les premiers exemples de mise en œuvre d'une telle méthode semblent remonter à Héron d'Alexandrie, il y a vingt siècles. Le théorème de Banach (1922) fournit un cadre général de convergence de la méthode, ce qui garantit le succès du processus de calcul sous certaines hypothèses.

2 Méthode des approximations successives.

2.1 Léonard de Pise

Pour l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0, \quad (2)$$

Léonard de Pise (alias Fibonacci) a proposé en 1225 dans son ouvrage, "*Fleur de solutions de certaines questions relatives au nombre et à la géométrie*", une solution approchée :

$$x_0 = 1,368\,808\,107.$$

Nul ne sait comment il a procédé.

En ce qui nous concerne, écrivons l'équation sous la forme :

$$x = \Phi_0(x), \quad \text{avec} \quad \Phi_0(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}.$$

Partant de la valeur initiale $x_0 = 1$, définissons l'itération

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \Phi_0(x_n) \\ x_0 &= 1. \end{cases}$$

Si ce choix est pertinent, la suite $(x_n)_n$ convergera vers la solution x_* de (2) et pour chaque entier n fixé, x_n apparaîtra alors comme une approximation (de niveau n) de x_* .

Par ce procédé, on obtient le tableau suivant des premières valeurs (arrondies) de x_n .

$x_1 = 1,538\,461\,538$	$x_7 = 1,370\,086\,003$	$x_{13} = 1,368\,817\,874$	$x_{19} = 1,368\,808\,182$
$x_2 = 1,295\,019\,157$	$x_8 = 1,368\,241\,023$	$x_{14} = 1,368\,803\,773$	$x_{20} = 1,368\,808\,075$
$x_3 = 1,401\,825\,309$	$x_9 = 1,369\,059\,812$	$x_{15} = 1,368\,810\,032$	$x_{21} = 1,368\,808\,123$
$x_4 = 1,354\,209\,390$	$x_{10} = 1,368\,696\,398$	$x_{16} = 1,368\,807\,254$	$x_{22} = 1,368\,808\,101$
$x_5 = 1,375\,298\,092$	$x_{11} = 1,368\,857\,689$	$x_{17} = 1,368\,808\,487$	$x_{23} = 1,368\,808\,111$
$x_6 = 1,365\,929\,788$	$x_{12} = 1,368\,786\,103$	$x_{18} = 1,368\,807\,940$	$x_{24} = 1,368\,808\,107$

L'itération semble donc converger et permet d'obtenir des valeurs approchées de x_* . Néanmoins la convergence n'est pas très rapide. On peut facilement vérifier ces intuitions en évaluant l'erreur

$$e_n = x_* - x_n \quad (3)$$

(en fonction de e_{n-1}) grâce au théorème des accroissements finis et à l'estimation $\Phi'_0(x_*) \simeq -0,44$.

2.2 Le théorème de Banach

Théorème 2.1 (Théorème de Banach – approximations successives (1922)) Soit Y un espace métrique complet et $\Phi : Y \rightarrow Y$ une contraction stricte, c'est-à-dire une application lipschitzienne de rapport $L < 1$. Alors Φ admet un unique point fixe $x_* \in Y$ et l'on a $x_* = \lim x_n$ pour toute suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Phi(x_n) \\ x_0 \in Y. \end{cases} \quad (4)$$

L'unicité affirmée dans le théorème de Banach ci-dessus résulte de l'hypothèse : Φ contraction stricte. L'existence s'obtient en montrant que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

On notera que la convergence vers x_* ne dépend pas du point de départ $x_0 \in Y$.

Comme dans la suite nous n'aurons à utiliser le théorème de Banach que dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{R}^n , nous allons pointer la situation typique propre à ce cadre particulier.

Supposons donnée une fonction $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que Φ est C^1 sur I et admet un point fixe $x_* \in I$ dans l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I . On suppose que l'on a $|\Phi'(x_*)| < 1$. Alors grâce au théorème des accroissements finis, on montre facilement qu'il existe un voisinage fermé $Y \subset I$ de x_* tel que le théorème de Banach s'applique pour (Φ, Y) .

La situation précédente s'adapte sans grande difficulté au cas d'une fonction $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3 Méthode de Newton

3.1 Principe

La méthode est effectivement due à Newton (publiée en 1711), mais a été développée dans un cadre général non polynomial par Thomas Simpson (1710-1761).

On veut calculer les solutions de l'équation

$$f(x) = 0,$$

55 où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

La méthode de Newton ou méthode des tangentes est une méthode d'approximations successives associée au choix suivant pour Φ

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

L'itération de Newton est donc

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \\ x_0 \in Y \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

En termes géométriques, on peut dire que l'on effectue des tirs sur l'axe des abscisses le long des tangentes (voir la figure 1).

Si f admet une racine x_* et est deux fois dérivable en x_* avec la condition $f'(x_*) \neq 0$, il est
65 immédiat de vérifier que le choix de Φ ci-dessus donne

$$\Phi'(x_*) = 0.$$

Le point (fixe de Φ) x_* est donc super attractif (voir annexe).

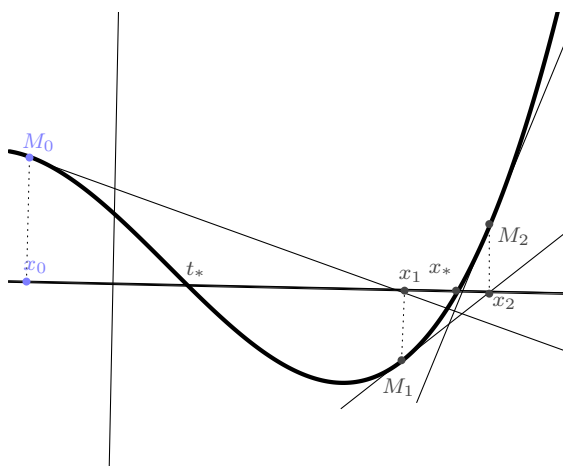


Fig. 1 – Résolution de $f(x) = 0$.

70 Bien entendu, pour pouvoir appliquer le théorème de Banach, c'est-à-dire obtenir la convergence des approximations successives, il faudra en vérifier les hypothèses : dans la pratique on aura à construire un intervalle de sécurité I fermé, stable par Φ , sur lequel Φ est une contraction stricte. Par exemple, quand f est C^2 au voisinage de x_* avec

$$f'(x_*) \neq 0,$$

75 une telle construction est toujours possible : en gros, (voir la figure 1) il ne faut pas tirer de trop loin pour être sûr de converger vers la cible x_* .

Pour f de classe C^2 au voisinage de la racine simple x_* , initialisant dans un intervalle de sécurité, on peut constater en appelant la formule de Taylor à l'ordre 2 que l'on a

$$|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

80 où l'erreur e_n est définie en (3) et où C est une constante convenable. Dans une telle situation la convergence est dite quadratique : grosso modo, chaque itération double le nombre de décimales exactes.

3.2 Newton contre Léonard de Pise

Appliquons la méthode de Newton à l'équation (2) de Léonard de Pise. On initialise comme
85 précédemment en posant $x_0 = 1$.

$x_1 = 1,411\,764\,706$	$x_2 = 1,369\,336\,471$	$x_3 = 1,368\,808\,189$	$x_4 = 1,368\,808\,108$
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Les calculatrices donnent :

$$f(1,368\,808\,107) \simeq -0,000\,000\,017 \quad \text{et} \quad f(1,368\,808\,108) \simeq +0,000\,000\,004.$$

Si l'on avait programmé l'itération de Newton avec pour test d'arrêt :

« faire mieux que Léonard de Pise »,

c'est-à-dire

$$|f(x_n)| < 0,000\,000\,017,$$

le programme s'arrêterait alors à la quatrième itération.

3.3 Héron d'Alexandrie

Considérons maintenant l'exemple très classique suivant :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

95 L'itération de Newton (que l'on pourra écrire) initialisée en $x_0 = 1,4$ donnera pour x_5 une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ avec plus de 30 décimales exactes.

Ce calcul approché par approximations successives (rationnelles) de racines carrées a été proposé par Héron d'Alexandrie au premier siècle de notre ère.

4 Un exemple de méthode de Newton dans \mathbb{R}^n

100 Introduisons le système suivant :

$$\begin{cases} x - y^2 + xe^y = 2 \\ ye^y + x^3 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Ce système admet deux solutions : $(1, 0)$ et $(0,929\,739\,5\dots ; 0,166\,249\,4\dots)$. Considérons la fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y^2 + xe^y - 2 \\ ye^y + x^3 - 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

L'itération de Newton (dite itération de Newton-Raphson) pour le système (5) est alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - A_{(x_n, y_n)}^{-1} f(x_n, y_n),$$

110 où la matrice $A_{(x,y)}$ est définie par

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 + e^y & -2y + xe^y \\ 3x^2 & (y+1)e^y \end{pmatrix}.$$

On vérifie en interprétant convenablement la matrice $A_{(x,y)}$ qu'il s'agit bien d'une extrapolation en dimension 2 de la méthode de Newton du paragraphe précédent.

115 Notons X_* l'une (n'importe laquelle!) des deux solutions du système (5). Posant

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A_{(x,y)}^{-1} f(x, y),$$

un calcul que le lecteur admettra donne $\Phi'_{X_*} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, où Φ'_{X_*} désigne la matrice jacobienne de Φ au point X_* .

120 On justifie alors de la même façon que dans le paragraphe précédent qu'il existe un domaine D de sécurité, voisinage dans \mathbb{R}^2 de X_* tel que l'itération de Newton-Raphson converge vers X_* pour toute initialisation $(x_0, y_0) \in D$. Définissant l'erreur e_n par

$$e_n = X_* - (x_n, y_n),$$

on trouve que la convergence est encore quadratique.

Par exemple, initialisant en $(x_0, y_0) = (0, 0)$, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	1	0,89	0,88	0,91	0,926	0,929 6	0,929 74
y_n	0	1	0,56	0,32	0,21	0,175	0,166 7	0,166 25

125

5 Résolution de systèmes linéaires : méthodes itératives.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le système linéaire

$$Au = b, \quad u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}). \quad (7)$$

130 Un principe différent des techniques de décompositions matricielles (comme la méthode du pivot de Gauss) consiste à définir une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réalisant

$$(Au = b) \Leftrightarrow \begin{cases} u = Bu + c \\ I - B \text{ inversible,} \end{cases}$$

où I est la matrice identité d'ordre n . On pose alors

$$\begin{cases} u_{k+1} = Bu_k + c, & k \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8)$$

Si u_* est la solution de (7) et si l'on introduit l'erreur

$$e_k = u_* - u_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

on obtient immédiatement

$$e_k = B^k(e_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

140 Si par exemple, B est symétrique et si l'on suppose que le rayon spectral de B est strictement plus petit que 1, c'est-à-dire

$$\rho(B) = \max_{\lambda \in \text{Sp } B} |\lambda| < 1, \quad (9)$$

où $\text{Sp } B \subset \mathbb{C}$ désigne le spectre de B , (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de B), alors on aura $I - B$ inversible et

$$\|Bu\| \leq L\|u\|, \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \text{avec } L = \rho(B), \quad (10)$$

où $\|u\| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne du vecteur $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le théorème de Banach s'appliquera alors et donnera un unique point fixe $u_* \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ approché par les u_k avec la précision suivante :

$$\|u_k - u_*\| \leq L^k \|u_0 - u_*\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

150 Un majorant de $\|u_0 - u_*\|$ est donné par

$$\|u_0 - u_*\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_0 - u_k\| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \|u_j - u_{j-1}\| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} L^{j-1} \|u_1 - u_0\| = \frac{1}{1-L} \|u_1 - u_0\|. \quad (11)$$

À vrai dire, la méthode itérative (8) converge pour toute initialisation si et seulement si la condition spectrale (9) (évidemment nécessaire) est réalisée, sans avoir besoin de supposer que B est symétrique et sans faire jouer de rôle particulier à la norme euclidienne. Cette condition spectrale garantit en

155 effet que $I - B$ est inversible et

$$\lim_k B^k = 0 \quad \text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

À titre d'illustration, considérons le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

que l'on écrit $AX = b$ en introduisant les matrices colonnes X et b . On pose $A = D + E$, avec la matrice D inversible, de sorte que

$$AX = b \Leftrightarrow X = -D^{-1}EX + D^{-1}b.$$

En particulier, pour

$$D = \text{diag}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = -D^{-1}(A - D), \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9/4 \end{pmatrix},$$

180 on définit alors l'itération (dite de Jacobi)

$$\begin{cases} x_{k+1} = & -\frac{y_k}{2} - \frac{z_k}{4} + 1 \\ y_{k+1} = & \frac{x_k}{2} + 1 \\ z_{k+1} = & -\frac{x_k}{2} - \frac{y_k}{4} + 9/4. \end{cases} \quad (13)$$

Démarrons l'itération en $u_0^t = (0, 0, 0)$. La notation u^t désigne la transposée de la matrice u . On
185 trouve :

$u_1^t = (1; 1; 9/4) = (1; 1; 2,25)$
$u_2^t = (-1/16; 3/2; 3/2) = (-0,0625; 1,5; 1,5)$
$u_3^t = (-1/8; 31/32; 61/32) \simeq (-0,125; 0,9688; 1,9063)$
$u_4^t = (5/128; 15/16; 265/128) \simeq (0,0391; 0,9375; 2,0703)$
$u_5^t = (7/512; 261/256; 511/256) \simeq (0,0137; 1,0195; 1,9961)$
$u_6^t = (-9/1024; 1031/1024; 1018/512) \simeq (-0,0088; 1,0068; 1,9883)$

La suite $(u_k)_k$ converge vers la solution $u_* = (0; 1; 2)^t$. Un calcul approché donne comme valeurs propres de la matrice B les valeurs $-0,096 \pm 0,391i$ et $0,193$ et le rayon spectral $\rho(B) \simeq 0,40$.

Pour améliorer la vitesse de convergence de cette méthode, Ludwig Seidel a proposé (en 1874)
190 une méthode itérative qui, appliquée à l'exemple ci-dessus donne :

$$\begin{cases} x_{k+1} = & -\frac{1}{2}y_k - \frac{1}{4}z_k + 1 \\ y_{k+1} = & \frac{1}{2}x_{k+1} + 1 \\ z_{k+1} = & -\frac{1}{2}x_{k+1} - \frac{1}{4}y_{k+1} + \frac{9}{4}. \end{cases} \quad (14)$$

Cette méthode, dite de Gauss-Seidel consiste, dans chaque itération de Jacobi de rang k définie
195 par le système d'équations (13), à ne pas attendre l'itération de rang $k + 1$ pour remplacer x_k par x_{k+1} puis y_k par y_{k+1} mais à effectuer en temps réel ce remplacement, c'est-à-dire à injecter dans la deuxième, puis dans la troisième équation de (13) les valeurs de rang $k + 1$ calculées x_{k+1} puis y_{k+1} au fur et à mesure de leurs calculs.

Cette méthode est bien une méthode itérative du type décrit au début de ce paragraphe et il est

200 facile d'expliciter la (nouvelle) matrice B :

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 5/16 & 5/32 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

dont le polynôme caractéristique et le rayon spectral valent respectivement $\det(B - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda + \frac{3}{32})$
 205 et $\rho(B) \simeq 0,094$. Ce rayon spectral est environ quatre fois plus petit que le précédent.

Démarrons comme précédemment l'itération en $u_0 = (0, 0, 0)^t$. On trouve alors

$u_1^t = (1; 3/2; 11/8) = (1; 1,5; 1,375)$
$u_2^t = (-3/32; 61/64; 527/256) \simeq (-0,0938; 0,9531; 2,0586)$
$u_3^t = (9/1024; 2057/2048; 16339/8192) \simeq (0,0088; 1,0044; 1,9945)$

Annexe

A Quelques définitions

²¹⁰ **Définition A.1 (Espace métrique)** On dit que (E, d) (ou plus simplement E quand il n'y a pas d'ambiguïté sur d) est un espace métrique si d est une distance sur l'ensemble E , c'est-à-dire si $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous $x, y, z \in E$:

(i) $d(x, y) = d(y, x)$;

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

²¹⁵ (iii) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$.

Définition A.2 (Espace métrique complet) On dit que E est un espace métrique complet, si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E .

Définition A.3 (Application lipschitzienne) Soient (E, d) un espace métrique, $L \in \mathbb{R}^+$ et $f : E \rightarrow E$ une application. On dit que f est L -lipschitzienne, si l'on a

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Proposition A.1 (Sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet) Tout sous ensemble fermé d'un espace métrique complet est un espace métrique complet.

Définition A.4 (Point super attractif) Soit x_* un point fixe de l'application $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si Φ est dérivable en x_* et si l'on a $\Phi'(x_*) = 0$, on dit que le point fixe x_* est super attractif pour Φ .