

## ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2013 - Partie D

### TITRE : LE COUPLAGE ENTRE LA FRICTION ET LES VIBRATIONS

- 5 Temps de préparation : .....2 h 15 minutes  
Temps de présentation devant les examinateurs : .....10 minutes  
Dialogue avec les examinateurs : .....10 minutes

#### 10 GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 13 pages

Guide candidat : 1 page

Document principal : 12 pages

15

Travail **suggéré** au candidat :

A partir du dossier, faire une présentation des modèles proposés, des résultats théoriques et numériques présentés. On s'efforcera de mettre en évidence les concepts principaux, les liens entre les différents modèles, et les conclusions générales.

20

#### CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

25

- \* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
- \* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.

30

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt à débiter votre exposé.

35

**Il est interdit de sortir le sujet du site de l'épreuve**

**A l'issue de l'épreuve, vous devez remettre au jury le dossier scientifique.**

40

**Tout ce que vous aurez présenté au jury pourra être retenu en vue de sa destruction.**

## A. LA FRICTION

45 La force de friction décrit l'interaction de frottement entre deux surfaces solides. Cette force est dissipative, au sens où elle dissipe l'énergie cinétique quand il y a mouvement. La tribologie --- science de la friction, du frottement et de l'adhésion --- a été initiée par les travaux de Leonardo da Vinci (début du XVI<sup>e</sup> siècle) et de Guillaume Amontons (*De la résistance causée dans les machines*, 1699), puis formalisée par Charles de Coulomb à la fin  
50 du XVIII<sup>e</sup> siècle (*Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et la roideur des cordages*, 1785). Toutefois, il semble qu'un membre de l'Académie des Sciences russe, Kotelnikov, soit le premier, en 1774, à introduire la notation  $\mu$  pour désigner le coefficient de friction.

55 La force de contact entre deux solides est décomposée en deux parties :

- une force tangentielle  $\vec{T}$  (la force de friction), située dans le plan de la surface de contact ;
- une force normale  $\vec{N}$ , perpendiculaire au plan de la surface de contact.

Quand les deux solides sont en contact statique (pas de vitesse relative), on note  $\mu_s$  le  
60 **coefficient de friction statique**. Dans ce cas, la force de friction est telle que

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

Quand il y a un glissement relatif entre les solides, la force de friction est telle que

$$\|\vec{T}\| = \mu_c \|\vec{N}\|$$

**Le coefficient de friction cinétique**  $\mu_c$  est toujours plus faible que le coefficient de friction statique  $\mu_s$ . De plus, de nombreuses expériences ont montré les propriétés suivantes :

- La force de frottement est indépendante de l'aire de la surface de frottement ;
- 65 • La force de frottement est indépendante de la vitesse de glissement entre les deux surfaces mais s'oppose au mouvement.

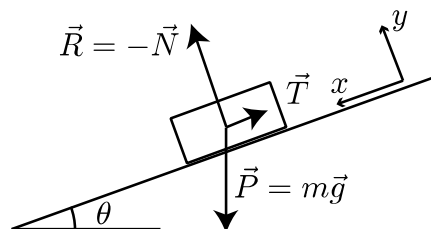
A titre de comparaison, le frottement visqueux induit par la viscosité d'un fluide environnant l'objet en mouvement est décrit par une force proportionnelle à la vitesse relative entre l'objet  
70 et le fluide. La force de frottement visqueux pour un objet de taille caractéristique  $D$  se déplaçant à vitesse  $\vec{V}$  dans un fluide de viscosité dynamique  $\eta$  est de la forme  $\vec{F}_{visc} = -aD\eta\vec{V}$ . Le coefficient  $a$  est sans dimension. La non-linéarité de la force de friction solide est la source de comportements très riches pour de nombreux phénomènes.

75 En l'absence de possibilité de prédiction et de calcul théorique, les coefficients de friction sont tabulés d'après des mesures normalisées. En effet de nombreux paramètres tels que les natures et les états de surface des parois en contact influent sur les coefficients de friction. A titre d'exemple, le coefficient de friction statique entre deux morceaux de bois varie entre 0,25 et 0,5 tandis que le coefficient de friction cinétique est plutôt de l'ordre de 0,20. De plus, 80 la friabilité des surfaces en contact peut conduire à la présence d'un *troisième corps*, des fines particules qui vont jouer le rôle de lubrifiant.

Une expérience simple pour déterminer le coefficient de friction statique consiste à incliner les surfaces en contact jusqu'à ce que la force de pesanteur dépasse la force de friction 85 statique. Au seuil de glissement, les forces de pesanteur, de réaction du support et de friction sont à l'équilibre (voir figure 1) ; on peut écrire que

- la réaction  $\vec{R}$  est opposée à la force normale :  $\vec{R} = -\vec{N} = mg \cos \theta \vec{e}_y$
- la force de friction tangentielle est opposée à la composante suivant x de la force de pesanteur :  $\vec{T} = -mg \sin \theta \vec{e}_x = -\mu_s \|\vec{N}\| \vec{e}_x$ .

90



**Figure 1 :** Un bloc frottant posé sur un plan incliné au seuil de glissement.

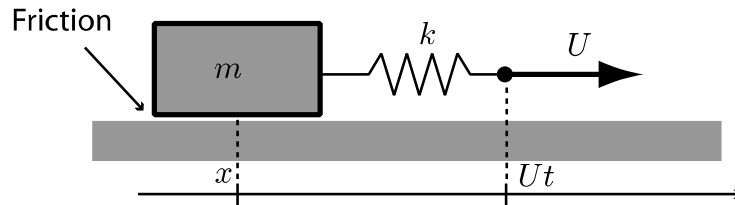
Comme  $\|\vec{T}\| = \mu_s \|\vec{N}\|$ , le coefficient de friction statique est donc égal à la tangente de l'angle 95 d'inclinaison :  $\mu_s = \tan \theta$ . La difficulté de la mesure provient de la mesure précise de l'angle d'inclinaison.

## B. LE PHÉNOMÈNE DE COLLÉ-GLISSÉ (*STICK-SLIP*)

100 Un comportement de déplacement saccadé peut être observé quand on tire sur un objet frottant par l'intermédiaire d'un ressort (figure 2). Ce modèle générique est représentatif de

nombreuses situations naturelles, artificielles ou industrielles. On observe alors un mouvement intermittent composé alternativement d'une période où l'objet résiste à la traction (le « collé ») et d'une période où l'objet glisse (le « glissé »).

105



**Figure 2 :** Modèle mécanique le plus simple pour illustrer le collé-glissé : une masse frottante est tirée par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  dont l'extrémité est tirée à vitesse constante  $U$ .

110

Pour que le bloc glisse, il faut que la force élastique de traction soit supérieure à la force de friction. Quand c'est le cas, son équation du mouvement est

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(Ut - x) - \mu_c mg$$

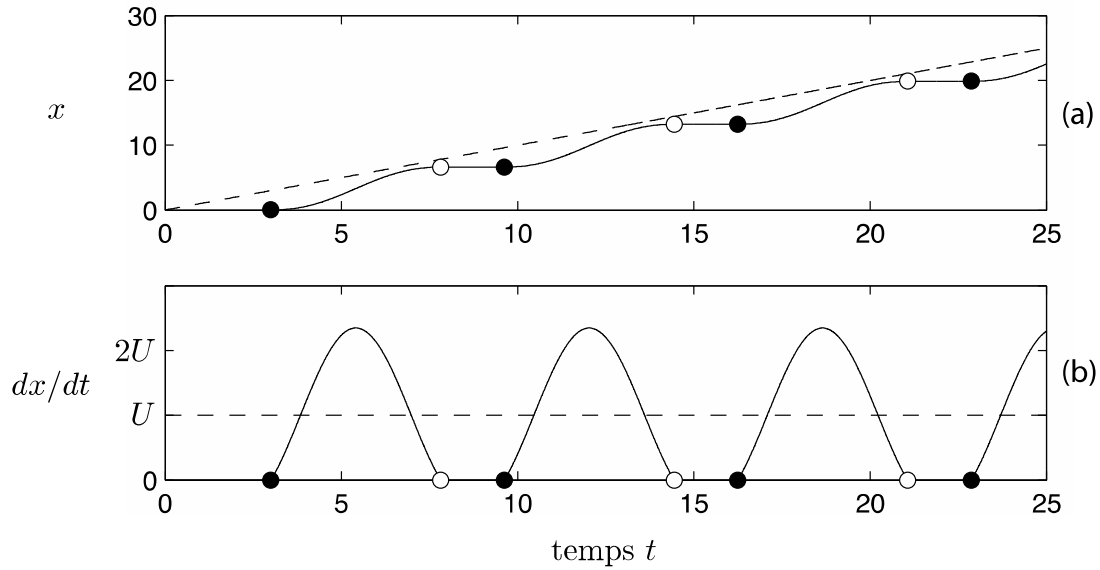
ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_0^2 (Ut - x) - \mu_c g$$

avec la pulsation propre du système masse-ressort  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Un exemple de résolution

115

numérique est présenté sur la figure 3, avec le tracé de la position  $x$  et la vitesse  $dx/dt$ . On peut observer que le bloc a bien une vitesse périodique mais non harmonique. L'ordre de grandeur de la période est déterminé par la période  $2\pi/\omega_0$  du système masse-ressort. Entre deux phases de glissement, la durée de la phase collée dépend de la différence entre les coefficients de friction statique et cinétique.



120

**Figure 3 :** (a) position  $x$  du bloc frottant (trait continu). Le trait pointillé représente le déplacement de l'extrémité du ressort, déplacement à vitesse constante  $U$ . (b) vitesse du bloc en fonction du temps (trait continu), comparée à la vitesse  $U$  de traction (trait pointillé). Les ronds noirs indiquent le début du glissement, tandis que les ronds blancs indiquent la fin du glissement.

125

Ce modèle générique trouve de nombreuses applications. Un premier exemple bien connu de « collé-glissé » est la vibration d'une corde de violon sous l'effet du frottement par un archet. Dans cette configuration, la corde joue le rôle du ressort, et l'archet est le patin frottant. En déplaçant l'archet à vitesse constante, l'alternance de moments collés et de moments glissés met la corde en vibration à sa fréquence propre et la caisse du violon permet d'amplifier et de projeter le son.

130

On peut également observer ce phénomène dans les vibrations provoquées par le frottement entre deux plaques continentales de la croûte terrestre. Lors du lent déplacement relatif des plaques, des contraintes mécaniques importantes s'accumulent à la jointure entre les plaques. Lorsque le seuil de friction est atteint, les plaques glissent l'une par rapport à l'autre, et l'énergie potentielle élastique est brutalement relâchée sous la forme d'ondes de cisaillement et de compression principalement, c'est le tremblement de terre.

135

140

On trouve ce phénomène également dans le domaine de l'exploration géologique et pétrolière. Lors d'un forage, la rotation de la tête foreuse peut être gênée par le frottement dans une

roche comprimée. La production de vibrations induite par la rotation limite en général la durée de vie de l'équipement et la difficulté d'intervention à plusieurs km de profondeur rend cette problématique importante pour l'ingénierie du forage. Ce problème de frottement vibrant se retrouve également au niveau des câbles et tubes qui relient la tête de forage à la surface. Actuellement de nombreux forages ne sont plus verticaux mais inclinés, et même si le diamètre de forage est plus grand que le tube, il se peut qu'il soit en frottement contre la paroi interne. Encore une fois, les vibrations du collé-glissé limitent les performances de l'équipement.

On peut citer un dernier exemple dans le domaine de la zoologie. La langouste californienne (*Panulirus interruptus*) utilise le collé-glissé entre un plectre (un morceau de carapace triangulaire) situé à la base de ses antennes et une partie striée de sa tête pour produire des sons de haute fréquence et de forte intensité. Ces bruits sous-marins importants servent à effrayer les prédateurs de la langouste qui croient s'approcher d'un animal plus gros.

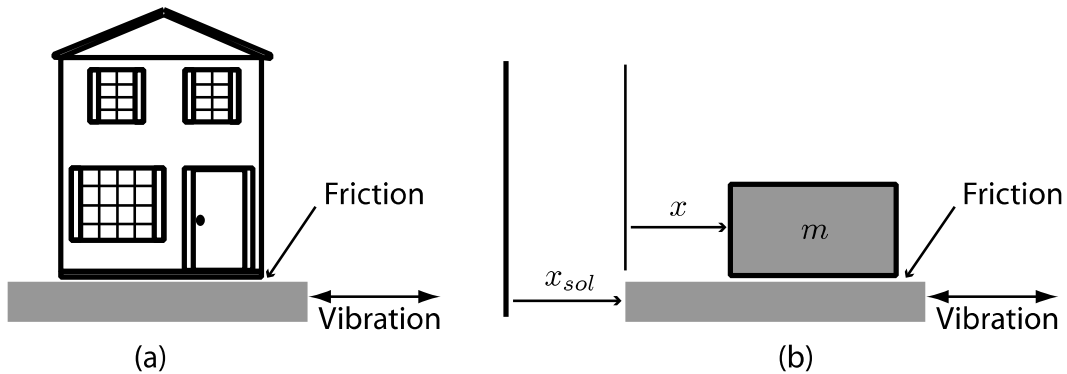
Tous ces phénomènes sont associés à une dynamique associant deux éléments mécaniques : un élément élastique permettant de stocker de l'énergie potentielle élastique, et un élément frottant qui fixe un seuil de force pour déclencher le mouvement.

Dans ces exemples, le caractère non-linéaire de la force de friction permet de « transformer » un mouvement uniforme en mouvement non-uniforme. On peut aussi se demander comment un contact frictionnel peut transmettre une vibration déjà présente dans une partie d'un système mécanique.

### **C. TRANSMISSION D'UNE VIBRATION PAR LA FRICTION**

L'ingénierie de la construction parasismique s'intéresse beaucoup au couplage entre la friction solide et des vibrations induites par les séismes. Une solution étudiée en construction parasismique est de placer une construction sur une base permettant le glissement pour éviter la propagation de trop grandes déformations dans la structure. Ainsi on espère réduire les dégradations liées aux vibrations. Après des travaux fondateurs de Den Hartog dans les années 1930, de nombreux modèles de couplage friction/vibration tentent de prédire le comportement d'une structure soumise à une vibration. Le modèle le plus simple présenté ici

est un bloc solide posé sur une surface mise en vibration horizontale, avec un seul coefficient de friction :  $\mu_s = \mu_d = \mu$  (voir figure 4).



180 **Figure 4** : (a) Le bâtiment est solidaire d'une base qui elle peut glisser sur le sol en mouvement. (b) Le modèle mécanique correspondant est un bloc de masse  $m$  avec une liaison frictionnelle unique avec le sol en vibration.

185 La vibration du sol est décrite dans ce modèle par un mouvement périodique horizontal monochromatique d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$  :  $x_{sol} = A \cos(\omega t)$ . En notant  $x$  la position du bloc par rapport au sol et  $v = dx/dt$  sa vitesse relative, l'équation du mouvement quand il y a glissement est

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \frac{v}{|v|} - mA\omega^2 \cos(\omega t)$$

190 Dans cette équation, le premier terme du membre de droite est la force de friction et le deuxième terme est la force d'inertie causée par la vibration du sol. Quand le bloc est collé au sol (la force de friction est supérieure à la force d'inertie), la position relative est nulle, ainsi que la vitesse relative.

195 Pour que le bloc soit en permanence collé au sol, il faut que l'accélération de la vibration du sol soit inférieure à une valeur critique. La condition d'adhérence pour tout instant est écrite sous la forme d'un nombre sans dimension inférieur à 1 :

$$\alpha < \frac{A\omega^2}{\mu g}$$

Au contraire, on peut imaginer que pour des fortes accélérations du sol le bloc est en glissement permanent. Le seuil d'accélération pour observer le glissement permanent est calculé ci-dessous.

L'instant du début du glissement  $t_0$  est déterminé par l'égalité entre la force d'inertie et la force de friction. On a alors

$$\mu g = A\omega^2 \cos(\omega t_0)$$

ce qui donne  $t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ .

L'intégration par rapport au temps de l'équation du mouvement donne

$$v = -\mu g t - A\omega \sin(\omega t) + C$$

205 où  $C$  est une constante d'intégration. Cette constante est déterminée par la vitesse nulle à l'instant  $t_0$ , et l'équation de vitesse est donc

$$v = -\mu g(t - t_0) - A\omega[\sin(\omega t) - \sin(\omega t_0)]$$

Si on note  $t_f$  l'instant de fin de glissement, la vitesse relative redevient nulle et la durée de la phase de glissement  $t_f - t_0$  est déterminée par

$$0 = -\mu g(t_f - t_0) - A\omega[\sin(\omega t_f) - \sin(\omega t_0)]$$

Sachant que la durée d'une demi-période de vibration est  $\pi/\omega$ , le glissement est continu si

$$t_f - t_0 = \pi/\omega,$$

210 ce qui donne

$$0 = -\mu g \frac{\pi}{\omega} - A\omega \left[ \sin(\omega t_0 + \pi) - \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \right]$$

ou encore

$$\pi = 2\alpha \sin\left[\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

puis

$$\arcsin \frac{\pi}{2\alpha} = \arccos \frac{1}{\alpha}$$

En utilisant la transformation complexe  $\arccos z = -i \ln(z + i\sqrt{1-z^2})$  et  $\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$ , on obtient finalement une valeur critique du paramètre  $\alpha$  :

$$\alpha_c = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \approx 1,82$$

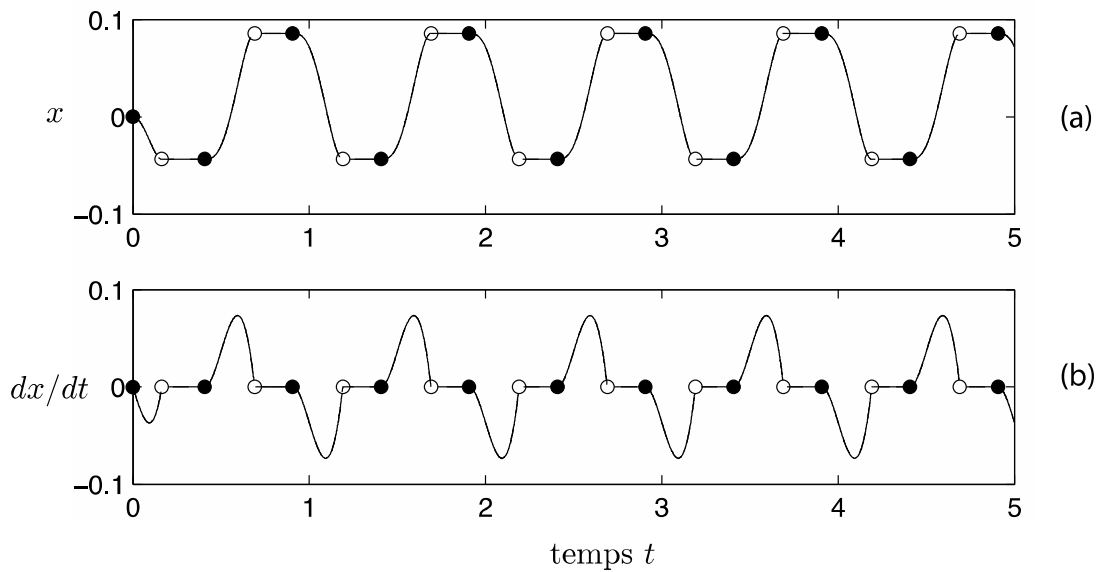
215 au-delà duquel le bloc est en glissement permanent.

Ce modèle permet donc de décrire trois régimes : le premier est le régime « collé » où le bloc ne glisse pas par rapport à la surface ( $\alpha < 1$ ). Le deuxième régime est le régime intermittent



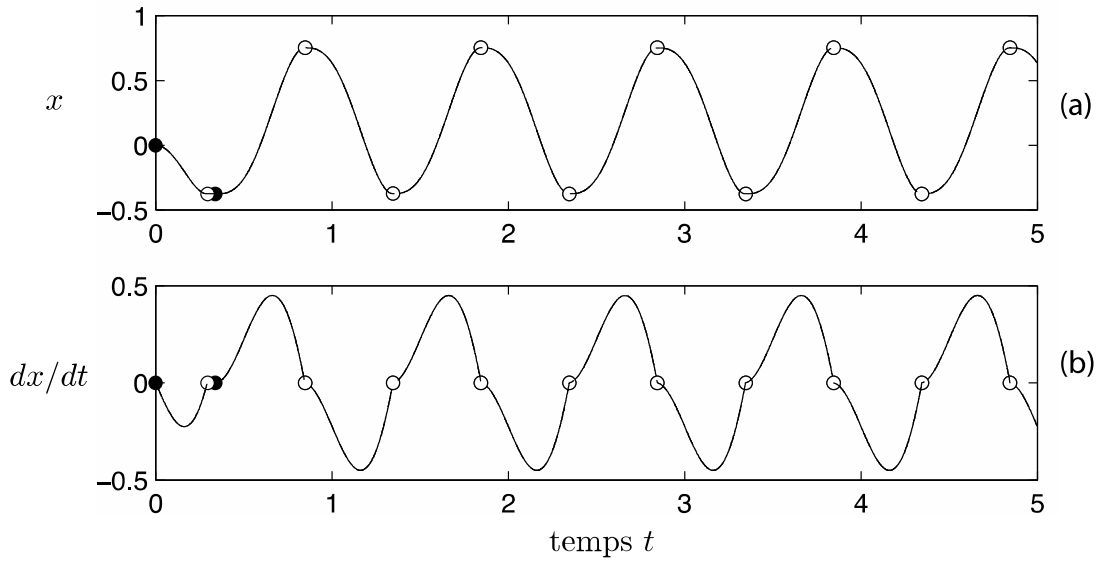
« collé-glissé » où le bloc décrit un mouvement périodique ( $1 < \alpha < \alpha_c$ ). Enfin le troisième régime est un régime de glissement permanent ( $\alpha > \alpha_c$ ).

Un exemple de comportement collé-glissé est présenté sur la figure 5, pour  $\alpha=1,2$ . La figure 5(a) montre l'évolution de la position relative en fonctions du temps, et la figure 5(b) montre la vitesse en fonction du temps. On vérifie bien l'existence d'une alternance régulière de phases collées et de phases glissées. Les points noirs et blancs permettent d'identifier les début et fin des phases de glissement.



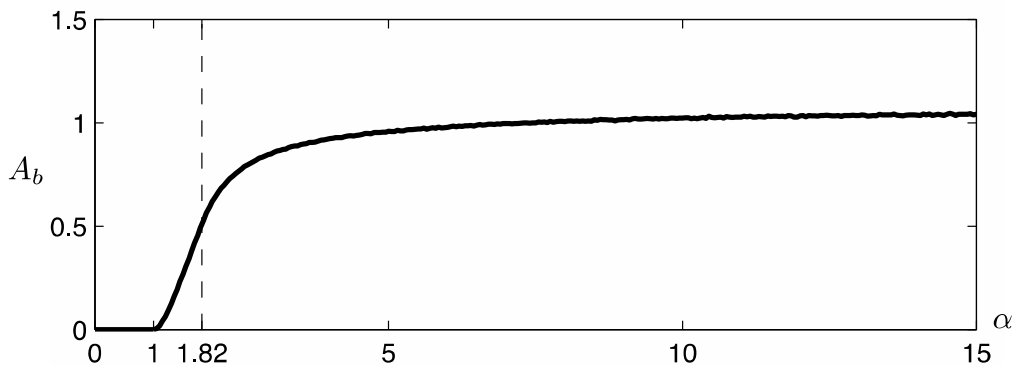
**Figure 5 :** Illustration du régime collé-glissé avec un paramètre de vibration  $\alpha=1,2$ . Les ronds noirs représentent les instants de début de glissement tandis que les ronds blancs représentent les instants de fin de glissement.

Le régime de glissement permanent est lui illustré par la figure 6, où après un court transitoire, le bloc ne marque plus d'arrêt mis à part les instants où la vitesse passe par 0 en raison d'un changement de direction de glissement.



235 **Figure 6** : Illustration du régime glissé avec un paramètre de vibration  $\alpha=1,9$ . Les ronds noirs représentent les instants de début de glissement tandis que les ronds blancs représentent les instants de fin de glissement.

Dès que le bloc est en mouvement relatif par rapport au sol, on peut mesurer numériquement  
 240 son amplitude  $A_b$  (définie comme la moitié de l'amplitude pic-à-pic). Cette amplitude est présentée en fonction du paramètre d'accélération  $\alpha$  sur la figure 7. On y voit que l'amplitude est non nulle dès que le paramètre  $\alpha$  dépasse 1 avec une forte augmentation jusqu'à  $\alpha \approx 5$ , puis une saturation.



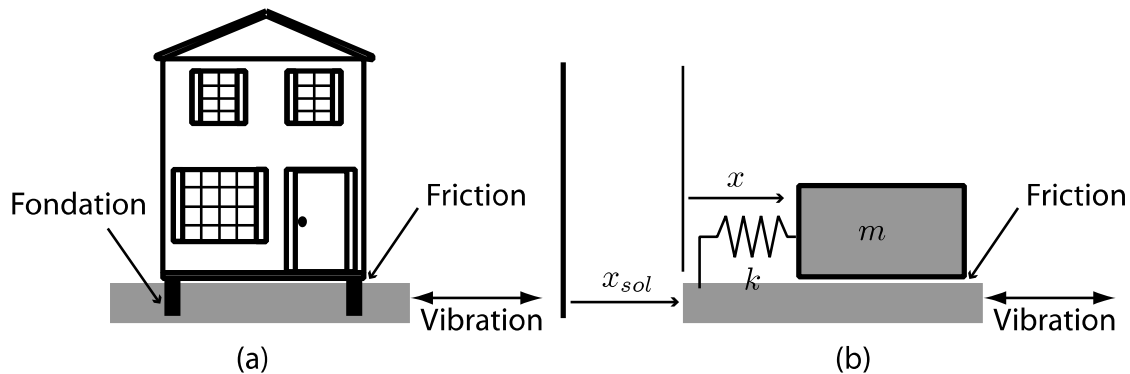
245 **Figure 7** : Amplitude de vibration du bloc en fonction du paramètre de vibration  $\alpha = A\omega^2/\mu g$ .

Dans ce modèle, la friction joue un double rôle : un rôle moteur puisque à partir du repos,  
 250 c'est la friction avec le sol qui transmet de l'énergie cinétique au bloc ; et un rôle frein

puisque lors du glissement, la friction dissipe l'énergie cinétique du bloc en mouvement. On peut également noter que la pulsation de la vibration est imposée et ne dépend pas des propriétés mécaniques du système.

255 **D. VIBRATIONS TRANSMISES PAR LA FRICTION EN PRÉSENCE D'UNE FORCE ÉLASTIQUE**

260 Construire un bâtiment en le plaçant sur une base pouvant glisser par rapport au sol va évidemment à l'encontre des techniques de construction classiques qui ancrent le bâtiment au sol via des fondations sous forme de murs ou de pieux. On doit donc s'intéresser à un système mixte qui autorise une friction basale mais avec présence d'une force de rappel élastique due à la présence des fondations.



265 **Figure 8 :** (a) Le bâtiment est solidaire d'une base qui est reliée au sol par des fondations.  
 (b) Le modèle mécanique correspondant est un bloc de masse  $m$  avec une liaison frictionnelle et une liaison élastique de raideur  $k$  avec le sol en vibration.

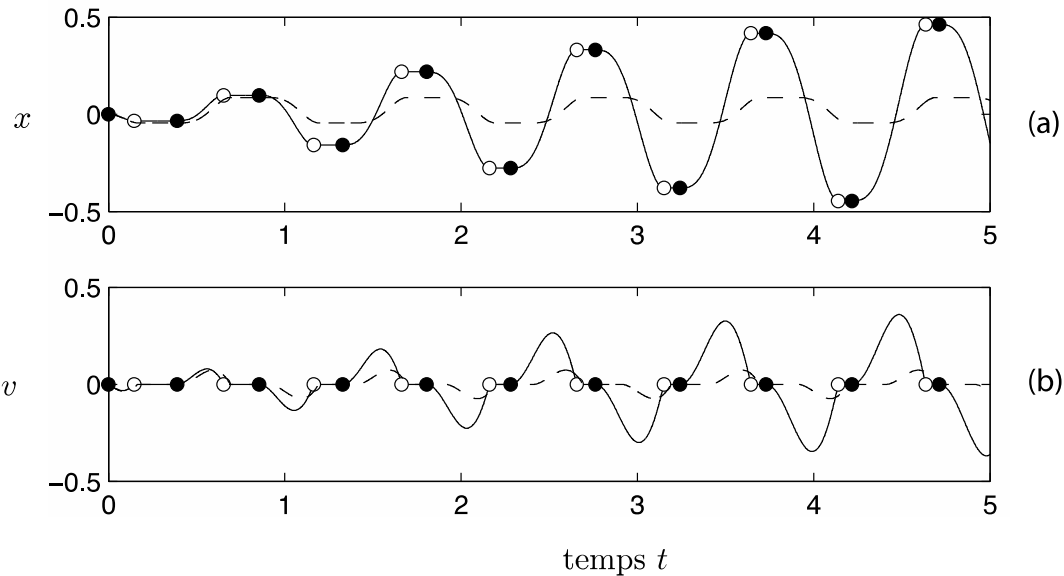
270 Le schéma de la figure 8(a) et son modèle mécanique (figure 8b) correspondant illustrent la présence de fondations sous forme de pieux qui vont se déformer sous l'effet d'une sollicitation du sol.

Avec les mêmes notations que la partie précédente, l'équation du mouvement du bloc est maintenant

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \frac{v}{|v|} - mA\omega^2 \cos(\omega t) - kx$$

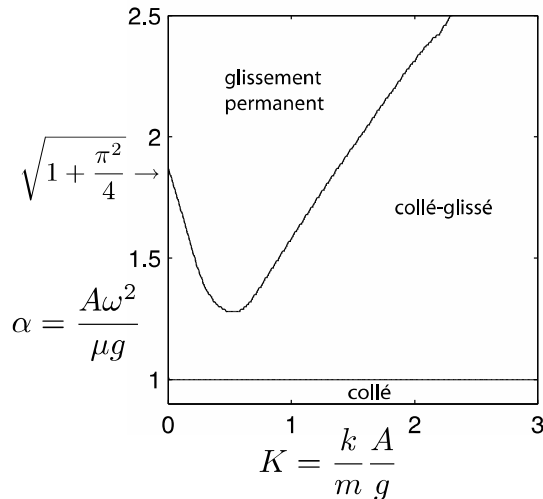
275 avec un terme supplémentaire qui modélise l'interaction élastique entre le bloc et le sol. La liaison élastique est caractérisée par une raideur  $k$  et cette force est directement proportionnelle à la position relative  $x$  entre le bloc et le sol.

La solution numérique présentée sur la figure 9 montre que la transmission de la vibration est augmentée par la présence de la liaison élastique. Il s'agit d'un régime collé-glissé. En comparant ces résultats avec les résultats de la figure 5, on voit que la présence d'une liaison élastique réduit la durée des phases collées. En effet, la liaison élastique permet de stocker de l'énergie potentielle, énergie qui est ensuite utilisée pour faire redémarrer le bloc.



**Figure 9** : Illustration du régime collé-glissé avec un paramètre de vibration  $\alpha=1,2$ . Les ronds noirs représentent les instants de début de glissement tandis que les ronds blancs représentent les instants de fin de glissement. Les courbes pointillées sont les courbes obtenues en l'absence de liaison élastique.

Par rapport au modèle précédent sans liaison élastique, il existe toujours trois régimes de déplacement : collé, collé-glissé et glissé. La limite entre le régime collé et le régime collé-glissé n'est pas affectée par la liaison élastique, car pour cette limite, le ressort n'a pas subi de déformation. Par contre la limite entre le régime collé-glissé et le régime de glissement permanent est fortement affectée par la présence d'élasticité. La figure 10 montre dans un plan (élasticité, vibration) comment se place la limite entre ces deux régimes.



295

**Figure 10 :** Diagramme de comportement du modèle frictionnel avec élasticité. L'axe des abscisses est l'axe d'élasticité, et l'axe des ordonnées et l'axe de vibration. Quand l'élasticité est nulle ( $K=0$ ), on retrouve les résultats obtenus dans la partie C.

### 300 E. CONCLUSION

Le couplage entre une liaison frictionnelle et des vibrations peut prendre différentes formes. Dans un cas, c'est la friction qui produit les vibrations ; la présence d'une force élastique est alors nécessaire pour observer un phénomène de collé-glissé, signature d'une différence entre le coefficient de friction statique et le coefficient de friction cinétique.

305

Quand la friction joue par contre le rôle de transmetteur de la vibration, le phénomène de collé-glissé peut être observé même en l'absence de force élastique, et également quand les deux coefficients de friction sont égaux.

310

Dans tous les cas, les vibrations ne sont pas harmoniques, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas décrites par une simple fonction sinus ou cosinus. C'est la signature du caractère fortement non-linéaire de la force de friction telle que décrite par le modèle de Coulomb.